

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2014/15 уч. год
Доп. главы теории дифференциальных уравнений (<http://math-info.hse.ru/s14/u>)
14 апреля 2015 (20 марта 2015)
И. В. Щуров

Материал занятия основан на [1, §16], задачи оттуда же.

Задача 1. Рассмотрим систему.

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{x} = \varepsilon(a + b \cos \varphi), \quad (1)$$

где $\omega \neq 0$, $\varphi \in S^1 \cong \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \ll 1$.

- (а) Найти усреднение (1).
- (б) Найти решение уравнения (1) с начальным условием $\varphi(0) = 0$, $x(0) = x_0$.
- (в) Найти решение усредненного уравнения. Сравнить с решением исходного.

Задача 2. Рассмотрим уравнение *осциллятора Ван-дер-Поля*

$$\ddot{x} = -x + \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}.$$

- (а) Перейти в координаты $\rho = \frac{x^2 + \dot{x}^2}{2}$ («энергия») и $\varphi = \arg(x + i\dot{x})$ (полярный угол)
- (б) Найти усреднённое уравнение на ρ .
- (в) Найти особые точки усреднённого уравнения.
- (г) Доказать, что у исходного уравнения имеется предельный цикл. К чему он стремится при $\varepsilon \rightarrow 0$?

Список литературы

- [1] Арнольд В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. — 400 с. (более ранние издания этой книги выходили под названием «Дополнительные главы теории дифференциальных уравнений»).