Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2014/15 уч. год
Доп. главы теории дифференциальных уравнений (http://math-info.hse.ru/s14/u)
Фазовые потоки (23 января 2015)
И. В. Щуров

Материал первой лекции содержится в [1, §4]. Задачи частично взяты оттуда же.

Задача 1. Существует ли фазовый поток у следующего уравнения или системы? Если да, найти его. Объяснить, что производит с фазовым пространством под действием потока.

(a) $\dot{x} = 0$;

(b) $\dot{x} = 1$;

(c) $\dot{x} = x + 1$;

(d) $\dot{x} = x^3$;

(e) $\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = y \end{cases}$

(f) $\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = x \end{cases}$

(g) $\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = x \end{cases}$

(h) $\begin{cases} \dot{x} = e^y \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$

(j) $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$

Задача 2. Докажите, что всякое гладкое векторное поле на прямой, растущее на бесконечности не быстрее линейного ($|v(x)| \le a + b|x|$), имеет (всюду определенный) фазовый поток.
Указание: сравнив движение с более быстрым движением в подходящем линейном поле, доказать, что решение не может уйти на бесконечность за конечное время и, следовательно, продолжается на всю ось t.

Задача 3. Является ли следующее семейство отображений фазовым потоком какого-либо автономного дифференциального уравнения? Если да, найти это уравнение.

(a) $g^t x = x$;

(b) $g^t x = 2x$;

(c) $g^t x = tx$;

(d) $g^t x = 2t + x$;

(e) $g^t x = 2x + t$;

(f) $g^t x = x + t^2$;

(g) $g^t x = \frac{x^2}{x+2t}$;

(h) $g^t x = e^{2t} x$;

(i) $g^t(x, y) = (x \sin t + y \cos t, -x \cos t + y \sin t)$.

(j) $g^t(x, y) = (x \cos t + y \sin t, -x \sin t + y \cos t)$.

Задача 4. Для тех пунктов предыдущей задачи, для которых семейства являются фазовыми потоками, найти значение выражения

$$\left. \frac{d}{dt} g^t x \right|_{t=0}.$$

Объяснить результат.

Список литературы

[1] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. — 368 с.