Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2014/15 уч. год
Доп. главы теории дифференциальных уравнений (http://math-info.hse.ru/s14/u)
Мидтерм (31 марта 2015)
И. В. Щуров

Задача 1. Доказать, что любое непрерывное взаимно однозначное отображение окружности, меняющее ориентацию (то есть такое, у которого поднятие является монотонно убывающей функцией), имеет ровно две неподвижные точки.

Указание. Пусть наше отображение $f\colon S^1 \to S^1$ и его поднятие $\widetilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, причём $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, то есть окружность S^1 получается путём склеивания на прямой всех точек, отличающихся на целое число. Чему равняется $\widetilde{f}(x+1)$ для отображения, меняющего ориентацию?

Задача 2. Рассмотрим семейство дифференциальных уравнений, записанных в полярных координатах ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$):

$$\dot r = r((1-r)^2 - \varepsilon), \quad \dot\varphi = 1. \tag{1}$$

(a) Сколько предельных циклов (в зависимости от ε) у этой системы? Найти явно решения, соответствующие предельным циклам.
(b) Нарисовать схематически фазовый портрет системы (в координатах (x, y)) для $\varepsilon = -1/4$, $\varepsilon = -1/16$, $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 1/16$, $\varepsilon = 1/4$.
(c) Нарисовать схематически график отображения Пуанкаре с отрезка $I = [1/2, 3/2] \times \{0\}$ на себя для указанных значений ε.
(d) Найти мультипликаторы всех предельных циклов системы для произвольного $\varepsilon \in [-1/4, 1/4]$ с помощью уравнения в вариациях. При каких значениях ε из указанного отреза система имеет устойчивый предельный цикл? Неустойчивый предельный цикл? Гиперболический предельный цикл? Предельный цикл, не являющийся гиперболическим?
(e) При каких значениях $\varepsilon \in [-1/4, 1/4]$ система не является структурно устойчивой?

Задача 3. Рассмотрим однопараметрическое семейство отображений плоскости $g^t(x, y) = (2^t x, 3^{-2t} y)$. Является ли это семейство однопараметрической группой диффеоморфизмов? Если да, найти векторное поле, для которого оно является фазовым потоком.

Определение 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение $\dot x = v(x)$, где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ и пусть U — некоторая область в пространстве $\mathbb{R}^n$, такая, что на границе U все векторы v направлены внутрь U (то есть U является поглощающей областью). *Максимальным аттрактором* системы в области U называется множество

$$A_{max} = \bigcap_{t>0} g^t(U).$$

Задача 4. Доказать, что множество A_{max} инвариантно под действием потока, то есть

$$g^t(A_{max}) = A_{max}$$

для любого t.

Определение 2. Гомеоморфизм — это взаимно однозначное отображение, непрерывное вместе с обратным.

Задача 5. Пусть f, g, h — некоторые гомеоморфизмы окружности, причём $g = h^{-1} \circ f \circ h$. Предположим, что у отображения f существует всюду плотная орбита. Доказать, что у отображения g также существует всюду плотная орбита.

Задача 6. Рассмотрим семейство дифференциальных уравнений на торе

$$\dot x = f(x, y), \quad \dot y = \varepsilon,$$

где $(x, y) \in \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, функция $f(x, y)$ является C^2-гладкой, $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Рассмотрим отображение Пуанкаре P с трансверсали $\Gamma = \{(x, y) \mid y = 0\}$ на себя. Доказать, что существует такое C, не зависящее от ε, что для всех x, $P'(x) < e^{C/\varepsilon}$.