Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2014/15 уч. год
Доп. главы теории дифференциальных уравнений (http://math-info.hse.ru/s14/u)
ДЗ№1 (16.02.2015)
И. В. Щуров

Определение 1. Квазимногочлен[1] — это конечная сумма функций вида $P(t)e^{\lambda t}$, где $P(t)$ — многочлен (быть может, с комплексными коэффициентами), λ — константа (быть может, комплексная). Степенью квазимногочлена называется максимальная из степеней многочленов $P(t)$, входящих в его конструкцию.

Задача 1. Покажите, что функция $f(t) = e^{2t}\sin \pi t + \cos 2t - t^2 + t^3 \sin t$ — квазимногочлен. Найдите его степень.

Задача 2. Рассмотрим линейный дифференциальный оператор D_λ, действующий на гладких функциях следующим образом:

$$(D_\lambda f)(t) = \frac{d}{dt}f(t) - \lambda f(t) = \left(\frac{d}{dt} - \lambda\right) f(t)$$

(a) Найти $D_\lambda(t^n e^{\mu t})$, где n — некоторое фиксированное натуральное число, μ — некоторое фиксированное (вообще говоря, комплексное) число.
(b) Доказать, что пространство всех квазимногочленов инвариантно под действием D_λ (то есть образ квазимногочлена есть квазимногочлен).
(c) Пусть $f(t) = P(t)e^{\mu t}$ — квазимногочлен степени n. Что можно сказать про степень $D_\lambda f$ в зависимости от значений λ и μ? Может ли степень увеличиться? Уменьшиться?
(d) Рассмотрим уравнение $D_2 x = 0$ относительно неизвестной функции $x(t)$. Найдите все его решения.
(e) Рассмотрим уравнение $D_2 x = e^{3t}$. Будем искать его частное решение в виде квазимногочлена вида $P(t)e^{3t}$. Какой максимальной степени можно выбрать многочлен $P(t)$? Записать этот многочлен в общем виде, подставить в уравнение и найти, чему равны его коэффициенты (метод неопределенных коэффициентов). Записать общее решение этого уравнения (напоминание: общее решение неоднородного линейного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и любого частного решения неоднородного).
(f) Выполнить предыдущий пункт для уравнения $D_2 x = e^{2t}$. Что принципиально изменилось?
(g) Найти все решения уравнения $\dot{x} - x = te^t + e^{2t}$.

Задача 3. Рассмотрим оператор $D = D_2 \circ D_3 = (\frac{d}{dt} - 2)(\frac{d}{dt} - 3)$.
(a) Найти $Df(t)$.
(b) Найти $D(t^n e^{\nu t})$. Какова степень получающегося квазимногочлена в зависимости от значения ν? (Подсказка: проще всего подействовать сначала одним оператором композиции, затем другим.)
(c) При каких μ функция $x(t) = e^{\mu t}$ является решением уравнения $Dx = 0$?
(d) Найти частное решение уравнения $Dx = e^t$. Найти его общее решение. Подсказка: действовать по аналогии с пунктом 2e предыдущей задачи.
(e) Выполнить предыдущий пункт для уравнения $Dx = e^{2t}$. Что изменилось?
(f) Найти все решения уравнения $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = te^t + e^{2t} + e^{3t}$.

Задача 4. Рассмотрим оператор $D = D_i \circ D_{-i} = (\frac{d}{dt} - i)(\frac{d}{dt} + i)$.
(a) Найти $Df(t)$.
(b) Найти $D(t^n \sin \nu t)$ и $D(t^n \cos \nu t)$. Какова степень получающегося квазимногочлена в зависимости от значения ν?
(c) При каких μ функция $x(t) = e^{\mu t}$ является решением уравнения $Dx = 0$?
(d) При каких μ функция $x(t) = \sin(\mu t)$ является решением уравнения $Dx = 0$?

[1] См. также одноимённый доп. листок из курса «Дифференциальные уравнения» 2012-13 года

(e) Найти частное решение уравнения $Dx = \sin 2t$. Найти его общее решение. Подсказка: действовать по аналогии с пунктом 2e предыдущей задачи. Искать решение в виде квазимногочлена вида $P(t)\sin 2t + Q(t)\cos 2t$.

(f) Выполнить предыдущий пункт для уравнения $Dx = \sin t$. Что изменилось?

Задача 5. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = 4\varepsilon t - x^2, \quad x(1) = 1, \tag{1}$$

где ε — малый параметр. Иными словами, нас интересуют свойства решений уравнения (1) при $\varepsilon \approx 0$.

Пусть $x(t;\varepsilon)$ — решение уравнения (1) с указанным начальным условием и заданным ε. Зафиксируем t и будем рассматривать $x(t;\varepsilon)$ как функцию от переменной ε. В этом случае её можно разложить в ряд Тейлора при $\varepsilon = 0$:

$$x(t;\varepsilon) = a_0(t) + a_1(t)\varepsilon + a_2(t)\varepsilon^2 + \ldots + a_n(t)\varepsilon^n + o(\varepsilon^n), \tag{2}$$

где коэффициенты в разложении в ряд Тейлора зависят от t, причём гладко (это следует из доказательства теоремы о гладкой зависимости решений от начальных условий).

(a) Подставить ряд (2), взятый до ε^2 включительно (то есть остаток должен быть $o(\varepsilon^2)$), в уравнение (1). Записать правую часть в виде ряда по степеням ε (то есть привести подобные слагаемые) с точностью до $o(\varepsilon^2)$.

(b) Приравнять коэффициенты при ε^0, ε^1 и ε^2 в правой и левой частях. Записать получившуюся систему из трёх дифференциальных уравнений с неизвестными функциями a_0, a_1, a_2.

(c) Сравнить уравнение на a_0 с исходным уравнением (1), а уравнение на a_1 с уравнением в вариациях для (1). Объяснить совпадение.

(d) Решить последовательно получившуюся систему относительно a_0, a_1, a_2. (Какими следует взять начальные условия?)

(e) Найти $\left.\frac{\partial^2 x}{\partial \varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}$.