Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2014/15 уч. год
Дифференциальные уравнения
Семинар 3. Уравнения с разделяющимися переменными (7.02.2014)
И. А. Хованская, И. В. Щуров, Д. А. Филимонов

Определение 1. Дифференциальное уравнение вида

$$y' = \frac{f(y)}{g(x)} \tag{1}$$

называется дифференциальным уравнением *с разделяющимися переменными.*

Замечание 1. *Для уравнений с разделяющимися переменными есть явный алгоритм отсыкания решений (правда, иногда эти решения могут будут заданы неявной функцией).*

Запишем уравнение (1) *в виде:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(y)}{g(x)}$$

Дальше магия (для объяснения нужны дифференциальные формы):

$$\frac{dy}{f(y)} = \frac{dx}{g(x)}$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int \frac{dx}{g(x)}$$

После интегрирования получается равенство, связывающее y и x, то есть выражающее неявно функцию $y(x)$.

Если была поставлена задача Коши с начальным условием $y(x_0) = y_0$, решение можно записать в таком виде:

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dz}{f(z)} = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{g(\xi)} \tag{2}$$

Задача 1. Решите уравнение. Нарисуйте соотвествующее поле направлений и его *интегральные кривые.*

(a) $y' = y/x$;
(b) $y' = 2y/x$;
(c) $y' = y/(2x)$;
(d) $y' = -y/x$;
(e) $y' = -x/y$;
(f) $y' = xy$;
(g) $y' = -xy$;
(h) $y' = \sqrt[5]{y^4}$.

Задача 2. Решите уравнения:

(a) $(x^2+4)y' = 2xy$;
(b) $y' = -xe^y$;
(c) $y' \operatorname{ctg}^2(x) + \operatorname{tg}^2(y) = 0$;
(d) $xy' + y = y^2$.

Замечание 2. *Некоторые уравнения не являются уравнениями с разделяющимися переменными, но становятся такими после того как мы сделаем некоторую замену.*

Задача 3. Подбирая подходящую замену, решить уравнение.

(a) $y' = \frac{y(1+xy)}{x(1-xy)}$;
(b) $y' = -\frac{x+y+1}{4x+4y+10}$;
(c) $y' = \sin(x+y)$;
(d) $y' = \sqrt{4x+2y-1}$.

Определение 2. *Траекторией* непрерывной вектор-функции $f\colon I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ называется кривая

$$\{x(t) \mid t \in I\} \subset \mathbb{R}^n$$

Можно также сказать, что траектория — это проекция графика функции на пространство значений $\mathbb{R}^n$.

Определение 3. *Траекторией* или *фазовой кривой* автономного дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

называется траектория решения этого уравнения. Иными словами, траектория — это проекция интегральной кривой на фазовое пространство.

В дальнейшем в этом листке при рассмотрении произвольных уравнений мы будем требовать, чтобы для них выполнялось условие теоремы существования и единственности решения (например, для (3) достаточно потребовать $f \in C^1$).

Задача 4. Для следующих систем уравнений:

- построить векторное поле и нарисовать эскизы фазовых кривых;
- решить — найти явно зависимость $(x(t), y(t))$ (подсказка: в приведенных системах уравнения не зависят друг от друга);
- нарисовать фазовые кривые по найденным уравнениям (для этого, возможно, понадобится выразить y через x или x через y);
- записать соответствующее уравнение типа $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$, решить его, построить поле направлений и интегральные кривые.

(a) $\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0$;
(b) $\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = y$;
(c) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y$;
(d) $\dot{x} = 2x, \quad \dot{y} = y$;
(e) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y$;
(f) $\dot{x} = x^2, \quad \dot{y} = -y$;