

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2014/15 уч. год

Дифференциальные уравнения

Семинар 2. Автономные уравнения на прямой (11.02.2015)

И. А. Хованская, И. В. Щуров, Д. А. Филимонов

**Замечание 1.** Существует несколько способов записывать дифференциальные уравнения. На лекциях мы пользовались в основном обозначением  $\dot{x} = f(x, t)$ . В дальнейшем мы будем также часто обозначать независимую переменную через  $x$ , а искомую функцию через  $y$ , и записывать уравнение в виде  $y' = f(x, y)$  или  $dy/dx = f(x, y)$ . Потом мы будем пользоваться и другими способами записи.

**Определение 1.** Геометрическое место точек плоскости  $(x, y)$ , в которых наклон касательных к решениям уравнения  $y' = f(x, y)$  один и тот же, называется *изоклиной*. Уравнение изоклины имеет вид  $f(x, y) = k$ , где  $k$  — постоянная.

**Замечание 2.** Чтобы приближенно построить решения уравнения  $y' = f(x, y)$ , можно начертить достаточное число изоклин, а затем провести решения, то есть кривые, которые в точках пересечения с изоклинами  $f(x, y) = k_1, f(x, y) = k_2, \dots$  имеют касательные с угловыми коэффициентами соответственно  $k_1, k_2, \dots$ .

**Задача 1.** С помощью изоклин начертить (приближенно) интегральные кривые данных уравнений.

(a)  $y' = 2x - y$ .

(b)  $y' = y - x^2$ .

(c)  $y' = \frac{x^2 + y^2}{2} - 1$ .

(d)  $(*) yy' + x = 0$ .

(e)  $(*) xy' = 2y$ .

(f)  $(*) xy' + y = 0$ .

(g)  $(*) y' = \frac{y}{x+y}$ .

**Задача 2.** [3] Найти все решения уравнений. Также найти явно все решения с заданными начальными условиями, если они указаны.

(a)  $y' = e^y$ .

(b)  $\dot{x} = t^2 + 1, x(1) = 2$

(c)  $\dot{x} = -3x, x(3) = 10$ .

(d)  $\dot{x} = 2x + t, x(0) = -1/4$  (подсказка: рассмотреть замену  $z = 2x + t$ ). Построить поле направлений и эскиз интегральных кривых.

(e)  $(*) \dot{x} = x^2 + 1$ .

(f)  $(*) \dot{x} = x \ln x, x > 0$ .

(g)  $(*) \dot{x} = 10^x$ .

(h)  $(*) \dot{x} = 1/(t + 2x); x(0) = -1$ . Построить поле направлений и эскиз интегральных кривых.

(i)  $(*) \dot{x} = \cos(x - t)$ .

## Список литературы

- [1] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000. — 368 с.
- [2] Heinz von Foerster, P. M. Mora and L. W. Amiot (November 1960) *Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026. At this date human population will approach infinity if it grows as it has grown in the last two millenia*. Science **132** (3436): 1291–1295. doi:10.1126/science.132.3436.1291
- [3] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.

<sup>1</sup>Задачи, помеченные звездочкой, не разбирались на семинаре, однако рекомендуются к самостоятельному обдумыванию.