Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2014/15 уч. год
Дифференциальные уравнения
Семинар 12. Линейные системы: вещественные собственные значения (6 февраля 2020 г.)
И. А. Хованская, И. В. Щуров, Д. А. Филимонов

Задача 1. Для следующих систем, найти решение задачи Коши $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, построить фазовый портрет и определить тип особой точки $(0, 0)$.

(a) $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 3y \\ \dot{y} = 6x + 5y \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 3y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \dot{x} = 7x - 21y \\ \dot{y} = 2x - 6y \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \dot{x} = 7x - 9y \\ \dot{y} = 6x - 8y \end{cases}$

Задача 2. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = 2x + y, \quad \dot{y} = 2y.$$

(a) Решить уравнение на y.
(b) Подставить полученное решение в уравнение на x. Решить получающееся уравнение на x.
(c) Записать решение задачи Коши с начальным условием $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ в виде

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = M(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

где $M(t)$ — некоторая матрица.

Задача 3. Записать решение задачи Коши с начальным условием $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$ для системы

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -2y, \quad \dot{z} = 3z$$

в виде

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = M(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},$$

где $M(t)$ — некоторая матрица. Нарисовать фазовый портрет.