

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2014/15 уч. год

Дифференциальные уравнения

Семинар. Линейные системы: комплексные собственные значения (6 февраля 2020 г.)

И. А. Хованская, И. В. Щуров, Д. А. Филимонов

Задача 1. Решить уравнение на комплексной прямой $z(t) \in \mathbb{C}$:

- (a) $\dot{z} = -2iz$;
- (b) $\dot{z} = (2 + 4i)z$;
- (c) $\dot{z} = (-1 + i)z$.

Задача 2. Пусть $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Записать уравнения из задачи 1 в матричном виде в координатах (x, y) . Записать решения получившихся уравнений. Нарисовать фазовые портреты.

Задача 3. Найти решение системы с начальным условием $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

$$\dot{x} = x - 3y, \quad \dot{y} = 3x + y.$$

Задача 4. Найти все вещественные решения следующих систем. Определить тип особой точки.

- (a) $\dot{x} = -x - 2y, \quad \dot{y} = 4x + 3y$;
- (b) $\dot{x} = -x - 5y, \quad \dot{y} = x + y$;
- (c) $\dot{x} = 8x + 25y, \quad \dot{y} = -2x - 6y$;
- (d) $\dot{x} = 5x + 4y, \quad \dot{y} = -10x - 7y$.

Указание. Найти какой-нибудь собственный вектор v матрицы системы. Он окажется комплексным, сопряженный к нему вектор также будет собственным (с сопряженным собственным значением). Пусть соответствующее собственное значение равно $\lambda = \alpha + i\omega$. Тогда у уравнения есть решения $ve^{\lambda t}$ и $\bar{v}e^{\bar{\lambda}t}$, а также, по линейности, все их линейные комбинации. Чтобы найти вещественные решения, достаточно взять вещественную и мнимую части $ve^{\lambda t}$ (почему они будут решениями?) и все их линейные комбинации.

Задача 5. При каком значении параметра α система имеет особую точку типа «центр»? Нарисовать фазовый портрет системы при этом значении α .

$$\dot{x} = \alpha x + 2y, \quad \dot{y} = -5x - 3y$$