

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2014/15 СТСЛЬ. РУР «РУ

Математический анализ 1

Семинар 3 (16 сентября 2014)

И. А. Хованская, Д. А. Дагаев, Н. Е. Сахарова, В. В. Казанцева, И. В. Щуров

Задача 1. Запишите, используя знаки \forall и \exists выражения и отрицания к этим выражениям:

- (a) не всякое дерево — дуб;
- (b) в каждом омуте водится чёрт;
- (c) в каждой аудитории НИУ ВШЭ сидит красный крокодил;
- (d) в кое-каких аудиториях НИУ ВШЭ сидит красный крокодил;
- (e) все красные крокодилы учатся в НИУ ВШЭ;
- (f) кое-какие красные крокодилы учатся в НИУ ВШЭ;

Задача 2. Рассмотрим два определения ограниченной последовательности:

Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной, если

- (a) существует такое C , что для всякого n : $a_n < C$.
- (b) существует такое C , что для всякого n : $a_n \leq C$.

Задают ли эти два определения одно и то же понятия, или разные? Если одно и то же, докажите. Если разные, приведите пример последовательности, которая удовлетворяет одному определению и не удовлетворяет другому.

Задача 3. Угадайте предел последовательности, пользуясь любыми разумными соображениями, и докажите, что это действительно предел последовательности, пользуясь определением.

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 - 1};$	(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+5}}{3^n};$	(g) (*) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} - \sqrt{n-1};$
(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}};$	(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{n^2 + 4n + 3};$	(h) (*) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n};$
(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n};$	(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 2^n}{n};$	(i) (*) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000^n}{n!}.$

Задача 4. Объясните, что значат следующие выражения. В каждом пункте выясните, обязательно ли последовательность $\{a_n\}$ сходится, если да, то обязательно ли её предел равен a ; если последовательность может расходиться, обязательно ли она расходится. Приведите примеры для каждого утверждения.

- | | |
|---|--|
| (a) $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : a_n - a < \varepsilon;$ | (g) $\exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N : a_n - a \geq \varepsilon;$ |
| (b) $\exists N \in \mathbb{N} \forall \varepsilon > 0 \forall n > N : a_n - a < \varepsilon;$ | (h) $\forall N \in \mathbb{N} \exists \varepsilon > 0 \exists n > N : a_n - a \geq \varepsilon;$ |
| (c) $\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \forall \varepsilon > 0 : a_n - a < \varepsilon;$ | (i) $\forall N \in \mathbb{N} \exists n > N \exists \varepsilon > 0 : a_n - a \geq \varepsilon;$ |
| (d) $\exists \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : a_n - a < \varepsilon;$ | (j) $\forall \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N : a_n - a \geq \varepsilon;$ |
| (e) $\forall \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \forall n > N : a_n - a < \varepsilon;$ | (k) $\exists \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \exists n > N : a_n - a \geq \varepsilon;$ |
| (f) $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \exists n > N : a_n - a < \varepsilon;$ | (l) $\exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \forall n > N : a_n - a \geq \varepsilon.$ |

Задача 5. Найдите предел следующих последовательностей, если он существует. Если предел не существует, докажите это.

- (a) $a_n = 1000^n$ при $n < 3000$, $a_n = \frac{1}{n}$ при $n \geq 3000$;
- (b) $a_n = \frac{1}{10^n}$ при $n = 3k$, $a_n = \frac{1}{n}$ при $n \neq 3k$;
- (c) $a_n = \frac{1}{2^n}$ при $n \neq 3^k$, $a_n = n$ при $n = 3^k$.