

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2014/15 СТСЛЬ. РҮР «РҮ**Математический анализ 1****Семинар 1 (2 сентября 2014)***И. А. Хованская, Д. А. Дагаев, Н. Е. Сахарова, В. В. Казанцева, И. В. Щуров*

Задача 1. (а) Дан многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ с целочисленными коэффициентами $a_0, a_1, \dots, a_n$, $n \geq 1$. Доказать, что если $a_n = 1$, x_0 — рациональное число и $P(x_0) = 0$, то x_0 — целое.

(б) Используя утверждение из пункта (а), доказать, что квадратный корень из любого неполного квадрата (натурального числа, не являющегося квадратом никакого натурального числа) иррационален.

Задача 2. Доказать геометрически, что число

(а) $\sqrt{5}$

(б) $\sqrt{3}$

иррационально.

Задача 3. Почему аналогичным образом невозможно доказать, что вообще не существует прямоугольных треугольников с целыми сторонами? (Например, треугольника со сторонами 3, 4, 5.) В каком месте доказательство «не проходит»?

Задача 4. Может ли

(а) сумма двух рациональных чисел быть иррациональным числом?

(б) сумма рационального и иррационального — рациональным?

(с) сумма двух иррациональных чисел — рациональным числом?

(д) произведение двух иррациональных чисел — рациональным числом?

Задача 5. Доказать, что число

(а) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

(б*) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$

является иррациональным.

Задача 6. Доказать, что любое рациональное число задается бесконечной периодической десятичной дробью (быть может, с периодом (0)).

Задача 7. Чему равняется $1 - 0,(9)$?

Задача 8. Доказать, что любая бесконечная периодическая десятичная дробь задает рациональное число.

Задача 9. Представьте, что вы — древний грек. Что вы можете сказать о числе π ? Как доказать, используя только геометрические рассуждения, что $\pi > 3$? Что $\pi < 4$? Можете ли вы доказать более точные оценки?

Задача 10 (*). Найти наибольший общий делитель (НОД) для чисел

(а) 6 и 15.

(b) 228 и 60.

Задача 11 (*). Разрезать прямоугольник

(a) 6×15

(b) 228×60

на одинаковые квадраты с наибольшей возможной стороной.

Задача 12 (*). С помощью алгоритма Евклида доказать, что для любых натуральных чисел m и n найдутся такие целые числа s и t , что $sm + tn = \text{НОД}(m, n)$. Однозначным ли образом они определены?

Задача 13 (*). Рассмотрим функцию $f(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$, $x > 0$. Показать, что если $f(x) = x$, то $x = \sqrt{2}$.

Рассмотрим последовательность чисел, которая строится по следующему закону. Первое число этой последовательности, обозначаемое x_0 , равняется единице. Каждое следующее число получается в результате применения к предыдущему функции $f(x)$, определенной в предыдущей задаче. Иными словами, $x_{n+1} = f(x_n)$. (Говорят, что мы рассматриваем *итерации* функции f .) Оказывается, пределом этой последовательности (при $n \rightarrow \infty$) является число $\sqrt{2}$. Этот факт можно использовать для приближенного нахождения $\sqrt{2}$.

Задача 14 (*). Вычислить первые 5 членов последовательности x_n .

Задача 15 (*). Как модифицировать функцию f , чтобы новая последовательность стремилась к корню из данного числа?

Задача 16 (*). Рассмотрим функцию $g(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$, $x > 0$. Показать, что если $g(x) = x$, то $x = \sqrt{2}$.

Задача 17 (*). Пусть последовательность y_n задается следующим образом: $y_0 = 1$, $y_{n+1} = g(y_n)$. Пределом такой последовательности является $\sqrt{2}$. Вычислить первые 5 элементов этой последовательности. Как вы считаете, какая из двух последовательностей (x_n или y_n) быстрее сходится к $\sqrt{2}$?

Задача 18 (*). Как модифицировать функцию g , чтобы новая последовательность стремилась к корню из данного числа? (Полученная таким образом формула называется *итерационной формулой Герона*.)

Задача 19 (*). Доказать, что $y_n = x_{2^n}$, то есть при применении итерационной формулы Герона получаются элементы последовательности x_n с номерами, равными степеням двойки.

Задача 20 (*). Доказать, что для любого натурального n , справедливо равенство:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Задача 21 (*). Используя результат предыдущей задачи, вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком параболы $y = x^2$, прямыми $x = 0$, $x = 1$ и $y = 0$.