Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2014/15 СЋСЉ. РүР«Рұ
Математический анализ 1
Семинар «O_o» (25 ноября 2014)

И. А. Хованская, Д. А. Дагаев, Н. Е. Сахарова, В. В. Казанцева, С. В. Головань, И. В. Щуров

Задачи со звёздочками решать необязательно, они дают дополнительные баллы. Результатами этих задач можно пользоваться.

1 Ловись O-большое и малое

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — две функции, определенные в некоторой проколотой окрестности точки x_0, причем $g(x)$ в этой окрестности не обращается в ноль.

Определение 1. Будем говорить, что $f(x)$ является O-большим от $g(x)$ при $x \to x_0$, если существует такая константа C, что для всех x из некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $|f(x)| \le C|g(x)|$. Обозначается $f(x) = O(g(x))$ при $x \to x_0$.

Определение 2. Будем говорить, что $f(x)$ является O-большим от $g(x)$ при $x \to x_0$, если существует проколотая окрестность точки x_0, на которой отношение $\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ ограничено. Обозначается $f(x) = O(g(x))$ при $x \to x_0$.

Задача 1. (*) Докажите, что определения 1 и 2 эквивалентны, то есть $f(x) = O(g(x))$ при $x \to x_0$ в смысле определения 1 тогда и только тогда, когда $f(x) = O(g(x))$ при $x \to x_0$ в смысле определения 2.

Определение 3. Будем говорить, что $f(x)$ является o-малым от $g(x)$ при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такая проколотая окрестность $\mathring{U}_\delta(x_0)$ точки x_0, что для всех точек из этой окрестности выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon|g(x)|$. Обозначается $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$.

Определение 4. Будем говорить, что $f(x)$ является o-малым от $g(x)$ при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$$

Задача 2. Докажите, что определения 3 и 4 эквивалентны, то есть $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$ в смысле определения 3 тогда и только тогда, когда $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$ в смысле определения 4.

Задача 3. (a) Что значит, что $f(x) = O(x^3)$ при $x \to 0$.

(b) Приведите пример функции $f(x)$, удовлетворяющей соотношению $f(x) = O(x^3)$ при $x \to 0$ и функции $g(x)$, не удовлетворяющей этому соотношению.

(c) Следует ли из того, что $f(x) = O(x^3)$ при $x \to 0$, что $f(x) = O(x^2)$ при $x \to 0$.

(d) Следует ли из того, что $f(x) = O(x^3)$ при $x \to 0$, что $f(x) = O(x^7)$ при $x \to 0$.

(e) Следует ли из того, что $f(x) = O(x^3)$ при $x \to 0$, что $f(x) = o(x^2)$ при $x \to 0$.
(f) Следует ли из того, что $f(x) = O(x^3)$ при $x \to 0$, что $f(x) = o(x^7)$ при $x \to 0$.

Все положительные ответы докажите, все отрицательные подробно проиллюстрируйте примерами.

Задача 4. (a) Что значит, что $f(x) = o(x^4)$ при $x \to 0$.
(b) Приведите пример функции $f(x)$, удовлетворяющей соотношению $f(x) = o(x^4)$ при $x \to 0$ и функции $g(x)$, не удовлетворяющей этому соотношению.
(c) Следует ли из того, что $f(x) = o(x^4)$ при $x \to 0$, что $f(x) = o(x^7)$ при $x \to 0$.
(d) Следует ли из того, что $f(x) = o(x^4)$ при $x \to 0$, что $f(x) = o(x)$ при $x \to 0$.
(e) Следует ли из того, что $f(x) = o(x^4)$ при $x \to 0$, что $f(x) = O(x^7)$ при $x \to 0$.
(f) Следует ли из того, что $f(x) = o(x^4)$ при $x \to 0$, что $f(x) = O(x^5)$ при $x \to 0$.
(g) Следует ли из того, что $f(x) = o(x^4)$ при $x \to 0$, что $f(x) = O(x)$ при $x \to 0$.

Все положительные ответы докажите, все отрицательные подробно проиллюстрируйте примерами.

2 Применение o-символики

Задача 5. Докажите, что
(a) $\sin 4x = 4x + o(x)$ при $x \to 0$.
(b) $e^{-6x} = -6x + 1 + o(x)$ при $x \to 0$.
(c) $\cos(6x) = -18x^2 + 1 + o(x^2)$ при $x \to 0$.
(d) $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$ при $x \to 0$. *Указание. Воспользуйтесь определением производной.*
(e) $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ при $x \to 0$ $(\alpha \neq -1)$.

Задача 6. (*) Пусть функция $f(x)$ имеет n первых производных в некоторой окрестности точки x_0, причём $f^{(n)}(x)$ — непрерывная функция в этой окрестности. Тогда

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + o(h^n)$$

при $h \to 0$.

(В этой задаче нельзя пользоваться никакими теоремами о ряде Тейлора, нужно самим ее доказать.)

Задача 7. Пусть $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $p(x)$ — функции, определенные в некоторой окрестности точки x_0. Пусть $h(x) = o((x - x_0)^n)$, $p(x) = o((x - x_0)^n)$, $g(x) \neq o((x - x_0)^n)$. Тогда

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + h(x)}{g(x) + p(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Если предел в правой части не существует, то и предела в левой части не существует.

Задача 8. Найти предел (без использования систем компьютерной алгебры):

(a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^5}\left(\frac{x^3}{6}-x+\sin\left(3x^5+x+5\sin\left(x^{19}+x^9\right)\right)\right)$.

(b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{4x^6+\sin\left(x^4\right)}\left(\frac{x^2}{2}+\cos\left(4x^4+x+6\sin\left(x^{17}+x^{11}\right)\right)-1\right)$.

(c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(-1+e^{-2x}\right)\left(-6x-\ln\left(-6x+1\right)\right)}{\operatorname{tg}\left(4x\right)-\operatorname{arctg}\left(4x\right)}$.

(d) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\sin\left(x^3\right)-\operatorname{arctg}\left(5x\right)\right)\left(7x+\sin\left(x^2\right)-\sin\left(x^4\right)-1+e^{-7x}\right)}{\sin\left(2x+\operatorname{tg}^3\left(x^5\right)\right)-\arcsin\left(2x\right)}$.

Указание. Воспользуйтесь результатами задач 6 и 7. Найдите такое n, чтобы выполнялось условие $g(x)\neq o((x-x_0)^n)$.

Задача 9. (*) Рассмотрим функцию

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq0;\\ 0 & x=0.\end{cases}$$

(a) Найдите $f^{(n)}(0)$ при всех n.
(b) Существует ли такое n, что $f(x)\neq o(x^n)$ при $x\to0$?
(c) Нарисуйте при помощи любой удобной вам программы графики функций $f(x)$, x^2, x^6.
(d) Существует ли функция $g(x)$, определённая при всех $x\in\mathbb{R}$ и такая, что для любого $n\in\mathbb{N}$ для любого x существует $g^{(n)}(x)$ и $g(0)=1$, $g(x)=0$ при $|x|>1$?

3 Пределы на бесконечности

И это ещё не всё!

Пусть $f(x)$, $g(x)$ — две функции, определенные для всех x больших по модулю некоторого числа M, причём $g(x)$ в этой окрестности не обращается в ноль.

Определение 5. Будем говорить, что $f(x)$ является O-большим от $g(x)$ при $x\to\infty$, если существует такая константа C. что для всех x больших по модулю некоторого числа M выполняется неравенство $|f(x)|\le C|g(x)|$. Обозначается $f(x)=O(g(x))$ при $x\to\infty$.

Определение 6. Будем говорить, что $f(x)$ является O-большим от $g(x)$ при $x\to\infty$, если для всех x, больших по модулю некоторого числа M, отношение $\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ ограничено. Обозначается $f(x)=O(g(x))$ при $x\to\infty$.

Задача 10. (*) Докажите, что определения 5 и 6 эквивалентны, то есть $f(x)=O(g(x))$ при $x\to x_0$ в смысле определения 1 тогда и только тогда, когда $f(x)=O(g(x))$ при $x\to x_0$ в смысле определения 2.

Определение 7. Будем говорить, что $f(x)$ является o-малым от $g(x)$ при $x\to\infty$, если для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое положительное число M, что для всех таких x, что $|x|>M$, выполняется неравенство $|f(x)|<\varepsilon|g(x)|$. Обозначается $f(x)=o(g(x))$ при $x\to\infty$.

Определение 8. Будем говорить, что $f(x)$ является o-малым от $g(x)$ при $x \to \infty$, если

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$$

Задача 11. Докажите, что определения 7 и 8 эквивалентны, то есть $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$ в смысле определения 7 тогда и только тогда, когда $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$ в смысле определения 8.

Задача 12. (a) Что значит, что $f(x) = O(x^4)$ при $x \to \infty$.

(b) Приведите пример функции $f(x)$, удовлетворяющей соотношению $f(x) = O(x^4)$ при $x \to \infty$ и функции $g(x)$, не удовлетворяющей этому соотношению.

(c) Следует ли из того, что $f(x) = O(x^4)$ при $x \to \infty$, что $f(x) = O(x^7)$ при $x \to \infty$.

(d) Следует ли из того, что $f(x) = O(x^4)$ при $x \to \infty$, что $f(x) = O(x^3)$ при $x \to \infty$.

(e) Следует ли из того, что $f(x) = O(x^4)$ при $x \to \infty$, что $f(x) = o(x^7)$ при $x \to \infty$.

(f) Следует ли из того, что $f(x) = O(x^4)$ при $x \to \infty$, что $f(x) = o(x^3)$ при $x \to \infty$.

Все положительные ответы докажите, все отрицательные подробно проиллюстрируйте примерами.

Задача 13. (a) Что значит, что $f(x) = o(x^4)$ при $x \to \infty$.

(b) Приведите пример функции $f(x)$, удовлетворяющей соотношению $f(x) = o(x^4)$ при $x \to \infty$ и функции $g(x)$, не удовлетворяющей этому соотношению.

(c) Следует ли из того, что $f(x) = o(x^4)$ при $x \to \infty$, что $f(x) = o(x^7)$ при $x \to \infty$.

(d) Следует ли из того, что $f(x) = o(x^4)$ при $x \to \infty$, что $f(x) = o(x)$ при $x \to \infty$.

(e) Следует ли из того, что $f(x) = o(x^4)$ при $x \to \infty$, что $f(x) = O(x^7)$ при $x \to \infty$.

(f) Следует ли из того, что $f(x) = o(x^4)$ при $x \to 0$, что $f(x) = O(x)$ при $x \to \infty$.

(g) Следует ли из того, что $f(x) = o(x^4)$ при $x \to 0$, что $f(x) = O(x^3)$ при $x \to \infty$.

Все положительные ответы докажите, все отрицательные подробно проиллюстрируйте примерами.