

**Отделение рекламы и связей с общественностью, 2014-15 уч. год****Теория вероятностей и статистика****Задачи на условную вероятность (15.09.2014)***И. А. Хованская, Р. Я. Будылин, И. В. Щуров, Д. А. Филимонов, К. И. Сонин (РЭШ)*

Для успешного освоения темы «Условная вероятность» студент должен уметь решать *все* перечисленные ниже задачи.

**Условная вероятность**

**Определение 1.** Условной вероятностью  $P(A|B)$  события  $A$  при условии  $B$  называется отношение вероятности пересечения  $A \cap B$  к вероятности события  $B$ :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Если все элементарные исходы равновероятны, то эта вероятность равна отношению количества исходов, благоприятных обоим событиям, к количеству исходов, благоприятных событию  $B$ :

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}.$$

**Задача 1.** Монетку подбросили два раза. Событие  $A$  — выпадение хотя бы одной решки, событие  $B$  — выпадение орла при первом подбрасывании монетки.

- (a) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию  $A$ .
- (b) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию  $B$ .
- (c) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событиям  $A$  и  $B$  одновременно.
- (d) Найдите вероятность события  $AB$ .
- (e) Найдите вероятность события  $A$  при условии  $B$ .

**Задача 2.** Игральный кубик подбросили два раза. Событие  $A$  — выпадение в первый раз четвёрки, событие  $B$  — выпадение восьми очков в сумме за два раза.

- (a) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию  $A$ .
- (b) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию  $B$ .
- (c) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событиям  $A$  и  $B$  одновременно.
- (d) Найдите вероятность события  $AB$ .
- (e) Найдите вероятность события  $A$  при условии  $B$ .

**Задача 3.** Монетку подбросили четыре раза. Событие  $A$  — выпадение орла в четвёртый раз, событие  $B$  — выпадение трёх орлов в первые три подбрасывания.

- (a) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию  $A$ .
- (b) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию  $B$ .
- (c) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событиям  $A$  и  $B$  одновременно.
- (d) Найдите вероятность события  $AB$ .
- (e) Найдите вероятность события  $A$  при условии  $B$ .

**Задача 4.** Газета «Комсомольская правда» писала: «новый антитабачный законопроект одобряет большинство наших экономически активных сограждан (66%).<...> Удивительно, но в поддержку запрета высказываются и многие курильщики — среди них этот показатель составил 42% (среди некурящих россиян инициативу Минздрава одобряют 75%)» (<http://www.kp.ru/daily/25964/2903066/>).

Выберем случайного человека среди экономически активных граждан. Пусть событие  $A$  — выбранный человек одобряет антитабачный закон, событие  $B$  — выбранный человек курит.

- Чему равно  $P(A)$ ?
- Чему равно  $P(A|B)$ ?
- Чему равно  $P(A|\bar{B})$ ?
- Можно ли из приведенного фрагмента вычислить, чему равно  $P(B|A)$ ?
- Предположим, что  $P(B|A) = 0.3$ . Какое предложение можно дописать в статью на основании этой информации?

## Зависимость событий

**Определение 2.** События  $A$  и  $B$  называются *независимыми*, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошло или нет другое событие, то есть вероятность события  $A$  равна вероятности события  $A$  при условии  $B$ , а вероятность события  $B$  равна вероятности события  $B$  при условии  $A$ :

$$P(A|B) = P(A), P(B|A) = P(B) \text{ для независимых событий } A \text{ и } B.$$

**Задача 5.** Монетку подбросили два раза. Нас интересует, какой стороной вверх падала монетка: орлом или решкой, интересна и последовательность выпадений, то есть выпадение сначала орла, потом решки мы отличаем от выпадения сначала решки, а потом орла. Все элементарные исходы мы считаем равновероятными. Зависимы ли события  $A$  — (выпадение орла в первый раз) и  $B$  — (выпадение орла во второй раз)?

**Задача 6.** Зависимы ли события  $A$  и  $B$  из задач 1–4?

**Задача 7.** По итогам выборов в Тилимитрядии стало известно, что за действующего президента в столице проголосовало 46,95% избирателей, а по всей стране его результат составил 63,6% голосов (от числа проголосовавших). Выберем случайного жителя Тилимитрядии из числа тех, кто голосовал на выборах. Являются ли независимыми события «этот житель проголосовал за действующего президента» и «этот житель живёт в столице»?

## Теоремы сложения и умножения вероятностей

**Теорема 8** (Теорема сложения вероятностей). Для любых двух событий  $A$  и  $B$  вероятность того, что хотя бы одно из событий произойдёт равна сумме вероятностей событий  $A$  и  $B$  минус вероятность их одновременного выполнения:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

**Теорема 9** (Теорема умножения вероятностей). *Для двух независимых событий  $A$  и  $B$  вероятность того, что оба события произойдут одновременно равна произведению вероятностей событий  $A$  и  $B$ .*

**Задача 10.** Монетку со смещенным центром тяжести подбросили два раза. Выпадение орла в первый раз и выпадение орла во второй раз будем считать независимыми событиями. При каждом подбрасывании выпадение орла считаем вдвое более вероятным, чем выпадение решки. Найти вероятности всех возможных исходов (РР, РО, ОР, ОО) в двух бросках.

**Задача 11.** Монетку подбросили пять раз. Выпадение орла в любой раз и выпадение орла в любой другой раз будем считать независимыми событиями, выпадение орла и решки при каждом броске считаем равновероятными. Перечислить все возможные исходы в пяти бросках, найти вероятность каждого. Как изменится ответ, если взять монетку со смещенным центром тяжести из предыдущей задачи?

**Задача 12.** Вероятность выиграть джек-пот в лотерею, равна 0,001%. Пусть в эту лотерею сыграло 100 000 игроков. С какой вероятностью кто-нибудь из них выиграл джек-пот? А если бы в лотерею сыграл миллион игроков?

В этой задаче можно использовать технику для вычисления — калькулятор, компьютер, а также приблизительные оценки).

**Задача 13.** По данным опроса, 20% населения Тилимилитрядии поддерживают политика И. И. Честного, 30% поддерживают политика А. А. Умного, причём 10% поддерживает их обоих.

- (а) Сколько процентов населения поддерживает И. И. Честного, но при этом не поддерживает А. А. Умного?
- (б) Сколько процентов населения поддерживает хотя бы одного из указанных двух политиков?
- (с) Выбрали случайного гражданина Тилимилитрядии. Пусть событие  $A$  — он поддерживает И. И. Честного, событие  $B$  — он поддерживает А. А. Умного. Чему равно  $P(A)$ ?  $P(B)$ ?  $P(AB)$ ?
- (д) Выполняется ли в этом примере теорема умножения вероятностей? Если нет, то почему?
- (е) Чему равно  $P(A + B)$ ? Выполняется ли теорема сложения вероятностей?