

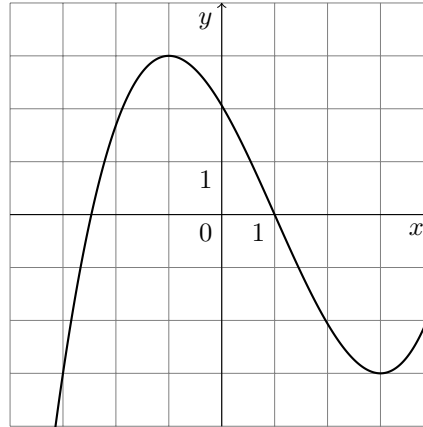
Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2013/14 уч. год

Дифференциальные уравнения

Семинар 7 (7.03.2014)

И. А. Хованская, И. В. Щуров, П. Ф. Соломатин, А. Петрин, Н. Солодовников

Задача 1. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Построить на одном и том же рисунке эскизы графиков следующих функций. (Обратите особое внимание на поведение производной вблизи границ области определения. Используйте теорему о производной сложной функции.)



- | | | | |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| (a) $\sqrt{f(x)}$; | (c) $\sqrt{f(x) - 3}$; | (e) $\sqrt{f(x) + 1}$; | (g) $\sqrt{f(x) + 3}$; |
| (b) $\sqrt{f(x) - 2}$; | (d) $\sqrt{f(x) - 4}$; | (f) $\sqrt{f(x) + 2}$; | (h) $\sqrt{f(x) + 4}$. |

Задача 2. Рассмотрим уравнение $\ddot{x} = f'(x)$, где $f(x)$ — функция из предыдущей задачи.

- Найти потенциальную энергию. Как выглядит график потенциальной энергии?
- Записать функцию полной энергии.
- Построить несколько линий уровня функции полной энергии.
- Построить фазовый портрет. Отметить все положения равновесия. Указать, какие из них являются устойчивыми, а какие неустойчивыми.

Задача 3. Построить фазовые портреты для следующих уравнений:

- | | | |
|----------------------------|-----------------------------|----------------------------------|
| (a) $\ddot{x} = x^2 - 1$; | (c) $\ddot{x} = 4x^3 - 4x$ | (e) $\ddot{x} = x^3 - x^2 - 2x$ |
| (b) $\ddot{x} = 1 - x^2$; | (d) $\ddot{x} = -4x^3 + 4x$ | (f) $\ddot{x} = -x^3 + x^2 + 2x$ |