

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2013/14 уч. год

Дифференциальные уравнения

Семинар 6. (28.02.2014)

И. А. Хованская, И. В. Щуров, П. Ф. Соломатин, А. Петрин, Н. Солодовников

Задача 1. Найдите производную функции $F(x, y) = x^2 - y^2$ вдоль следующих векторных полей:

- (a)
- $(2, 3)$
- ; (b)
- (x, y)
- ; (c)
- (y, x)
- ; (d)
- $(1, -e^y)$
- ;

Задача 2. [2]

Найти первый интеграл для следующих уравнений или систем. Как выглядят их фазовые кривые?

- (a)
- $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x \end{cases}$
- (b)
- $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$
- (c)
- $\begin{cases} \dot{x} = y^2 - x^2 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases}$
- (d)
- $\begin{cases} \dot{x} = 2y + xe^{-y} \\ \dot{y} = e^{-y} \end{cases}$

Задача 3. Частично основано на [2].

Докажите, что указанные функции являются первыми интегралами данных систем дифференциальных уравнений.

- (a)
- $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x^2 - y^2 - x, \end{cases} \quad F(x, y) = e^x \sqrt{x^2 + y^2}.$
-
- (b)
- $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 + y, \end{cases} \quad F(x, y) = x + \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$
-
- (c)
- $\begin{cases} \dot{x} = -x\sqrt{1+y^2} + y, \\ \dot{y} = y\sqrt{1+y^2}, \end{cases} \quad F(x, y) = xy - \sqrt{1+y^2}$
-
- (d)
- $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = -y, \\ \dot{z} = z, \end{cases} \quad F(x, y, z) = xy, \quad G(x, y, z) = yz$

Список литературы

- [1] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000. — 368 с.
-
- [2] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.