Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2013/14 уч. год
Дифференциальные уравнения
Семинар 5. Уравнения второго порядков и полные дифференциалы (21.02.2014)
И. А. Хованская, И. В. Щуров, П. Ф. Соломатин, А. Петрин, Н. Солодовников

Задача 1. Для следующих уравнений второго порядка записать соответствующую систему первого порядка, построить её векторное поле и найти фазовые кривые (можно в виде неявной функции) путём решения соответствующего неавтономного уравнения.

(a) $\ddot{x} = 1$; (b) $\ddot{x} = x$; (c) $\ddot{x} = \dot{x}$; (d) (*) $\ddot{x} = \dot{x} + x$.

Определение 1. Уравнение
$$F(x, y)dx + G(x, y)dy = 0 \tag{1}$$
называется *уравнением в полных дифференциалах*, если существует такая функция $H(x, y)$, что левая часть уравнения (1) является полным дифференциалом $dH(x, y)$, то есть $F(x, y) = \frac{\partial H(x,y)}{\partial x}$ и $G(x, y) = \frac{\partial H(x,y)}{\partial y}$.

Замечание 1. *Интегральными кривыми уравнения* (1) *являются линии уровня функции* H*.*

Теорема 2. *Уравнение* (1) *является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда* $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}$*.*

Задача 3. Доказать

(a) необходимость в теореме 2.
(b) (*) достаточность в теореме 2.

Замечание 2. *Если выполняется условие теоремы 2, функцию* H *можно найти следующим образом: проинтегрировать функцию* F *по* x*, полагая* y *фиксированным; при этом константа интегрирования будет зависеть от* y*, и её можно будет найти, подставив результат интегрирования в уравнение* $\frac{\partial H}{\partial y} = G$*.*

Задача 4. Найти выражение, задающее интегральные кривые следующих уравнений:

(a) $(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0$;
(b) $2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$;
(c) $\dot{x} = \frac{t(9tx^2-2)}{x(4x^2-6t^3)}$;
(d) $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$.

Определение 2. Уравнение вида
$$y' = a(x)y \tag{2}$$
называется *однородным линейным уравнением* (первого порядка в размерности 1, с переменными коэффициентами), а уравнение
$$y' = a(x)y + b(x) \tag{3}$$
называется *неоднородным* линейным уравнением.

Замечание 3. *Однородное линейное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными.*

Задача 5. (*) Решить уравнение (2) в общем виде.

Замечание 4. *Уравнение* (3) *превращается в уравнение в полных дифференциалах, если домножить его на функцию*
$$I(x) = e^{-\int a(x)dx}$$

Задача 6. Решить следующие уравнения.

(a) $\dot{x} = x + t$;
(b) $xy' - 2y = 2x^4$;
(c) $(2x + 1)y' = 4x + 2y$;
(d) $(xy + e^x)dx - x\,dy = 0$;
(e) $x^2y' + xy + 1 = 0$;
(f) $y' = \frac{y}{3x-y^2}$.