Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2013/14 уч. год
Дифференциальные уравнения
Семинар 3. Уравнения с разделяющимися переменными (7.02.2014)
И. А. Хованская, И. В. Щуров, П. Ф. Соломатин, А. Петрин, Н. Солодовников

Определение 1. Дифференциальное уравнение вида

$$y' = \frac{f(y)}{g(x)} \tag{1}$$

называется дифференциальным уравнением *с разделяющимися переменными.*

Замечание 1. *Для уравнений с разделяющимися переменными есть явный алгоритм отсыкания решений (правда, иногда эти решения могут будут заданы неявной функцией).*

Запишем уравнение (1) *в виде:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(y)}{g(x)}$$

Дальше магия (мы обсудим, какой смысл означает это равенство, когда освоимся с дифференциальными формами):

$$\frac{dy}{f(y)} = \frac{dx}{g(x)}$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int \frac{dx}{g(x)}$$

После интегрирования получается равенство, связывающее y и x, то есть выражающее неявно функцию $y(x)$.

Если была поставлена задача Коши с начальным условием $y(x_0) = y_0$, решение можно записать в таком виде:

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dz}{f(z)} = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{g(\xi)} \tag{2}$$

Задача 1. (*)[1] Пусть $F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{dz}{f(z)}$ и $y = y(x)$ — некоторая функция.

(a) Найти $\frac{d}{dx}F(y(x))$ (выразить результат через $f(y(x))$ и $y'(x)$).
(b) Дифференцируя обе части равенства (2) по переменной x, показать, что функция $y(x)$, удовлетворяющая (2), удовлетворяет также (1), то есть является решением исходного уравнения.

Задача 2. Решите уравнение. Нарисуйте соотвествующее поле направлений и его *интегральные кривые*. Выпишите соотвествущую ему дифференциальную форму.

(a) $y' = y/x$;
(b) $y' = 2y/x$;
(c) $y' = y/(2x)$;
(d) $y' = -y/x$;
(e) $y' = -x/y$;
(f) $y' = xy$;
(g) $y' = -xy$;
(h) $y' = \sqrt[5]{y^4}$.

Задача 3. Решите уравнения:

(a) $(x^2 + 4)y' = 2xy$;
(b) $y' = -xe^y$;
(c) $y' \operatorname{ctg}^2(x) + \operatorname{tg}^2(y) = 0$;
(d) $xy' + y = y^2$.

Замечание 2. *Некоторые уравнения не являются уравнениями с разделяющимися переменными, но становятся такими после того как мы сделаем некоторую замену.*

Задача 4. Подбирая подходящую замену, решить уравнение.

(a) $y' = \frac{y(1+xy)}{x(1-xy)}$;
(b) $y' = -\frac{x+y+1}{4x+4y+10}$;
(c) $y' = \sin(x + y)$;
(d) $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$.

[1] Звёздочками отмечены задачи, которые не войдут в самостоятельную через неделю.