Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2013/14 уч. год
Дифференциальные уравнения
Семинар 14. Устойчивость (23.05.2014)
И. А. Хованская, И. В. Щуров, П. Ф. Соломатин, А. Петрин, Н. Солодовников

Задача 1. Пусть $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — некоторый линейный оператор. Рассмотрим его малое возмущение $A_\varepsilon = A + \varepsilon B$, где B — произвольный оператор, ε — малое вещественное число. Докажите, что

(a) Если собственные числа A вещественны и различны, то и собственные числа A_ε вещественны и различны.
(b) Если собственные числа A комплексно сопряжены и различны, то и собственные числа A_ε комплексно сопряжены и различны.
(c) Если все собственные числа A не лежат на мнимой прямой (то есть имеют ненулевую вещественную часть), то и собственные числа A_ε не лежат на мнимой прямой, причём знаки их вещественных частей совпадают со знаками вещественных частей собственных значений A.

Задача 2. Рассмотрим семейство уравнений на плоскости

$$\dot{x} = \varepsilon - x^2, \quad \dot{y} = -y.$$

Построить фазовые портреты при $\varepsilon < 0$, $\varepsilon = 0$, $\varepsilon > 0$. Что происхоит при прохождение параметром ε значения 0?

Задача 3. [2] Исследовать особые точки следующих систем. Нарисовать примерно вид фазовых портретов вблизи особых точек.

(a) $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y \\ \dot{y} = \ln(1 - x + x^2) - \ln 3 \end{cases}$
(b) $\begin{cases} \dot{x} = \ln(2 - y^2) \\ \dot{y} = e^x - e^y \end{cases}$
(c) $\begin{cases} \dot{x} = \ln \frac{y^2 - y + 1}{3} \\ \dot{y} = x^2 - y^2 \end{cases}$

Список литературы

[1] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. — 368 с.
[2] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальных уравннеиям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.