

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2013/14 уч. год

Дифференциальные уравнения

Семинар 1. Основные понятия (24.01.2014)

И. А. Хованская, И. В. Щуров, П. Ф. Соломатин, А. Петрин, Н. Солодовников

Задача 1. [1, 2] Предположим, что величина биологической популяции (например, число рыб в пруду) равна x и что скорость прироста пропорциональна наличному количеству особей. (Это предположение приближенно выполняется, пока пищи достаточно много.)

- От каких параметров зависит модель?
- Рассматривая прирост популяции за некоторый интервал времени и устремляя этот интервал к нулю, вывести дифференциальное уравнение, решением которого является функция $x(t)$ — зависимость размера популяции от времени.
- Нарисовать поле направлений для найденного дифференциального уравнения.
- Нарисовать эскизы интегральных кривых (графиков решения в расширенном фазовом пространстве). Как будет зависеть вид интегральных кривых от параметра?
- Существуют ли решения уравнения, являющиеся постоянными?
- Решить полученное дифференциальное уравнение: найти зависимость $x(t)$ явно.
- Пусть в начальный момент времени $t = 0$ размер популяции равен x_0 . Найти решение, удовлетворяющее этому начальному условию.

Задача 2. [2], см. также [3].

Предположим, что скорость прироста популяции пропорциональна не числу особей, а *квадрату* числа особей. Решить задачу 1 в этом случае. Что вы можете сказать о вертикальных асимптотах решения? Какую интерпретацию этого явления вы можете привести?

Задача 3. [2] Предположим, что мы находимся в условиях задачи 1, но из-за ограниченности ресурсов коэффициент прироста (доля популяции, воспроизводящаяся за единицу времени) не является постоянным, а зависит от x как линейная функция: $a - bx$. (С ростом x всё меньшему числу особей удаётся найти достаточно ресурсов, чтобы продолжить род.) Решить для такой модели задачу 1. Что вы можете сказать о постоянных решениях получающегося уравнения? Что вы можете сказать о решениях с начальными условиями, близкими к этим постоянным решениям?

Задача 4. [4, 5] Согласно модели Солоу, прирост капиталовооруженности экономики k пропорционален такой величине:

$$\Delta k \sim sf(k) - \delta k, \quad (1)$$

где $f(k)$ — функция производства.

Записать дифференциальное уравнение для капиталовооруженности экономики в модели Солоу. Полагая $f(k) = \sqrt{k}$, решить для получившегося уравнения все пункты задачи 1, кроме 1f.

Список литературы

- [1] Malthus *An Essay on the Principle of Population*. London: J. Johnson, in St. Paul's Church-yard, 1798. EconLib-1798
- [2] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. — 368 с.
- [3] Heinz von Foerster, P. M. Mora and L. W. Amiot (November 1960) *Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026. At this date human population will approach infinity if it grows as it has grown in the last two millenia*. Science **132** (3436): 1291–1295. doi:10.1126/science.132.3436.1291
- [4] Solow, Robert W., *A Contribution to the Theory of Economic Growth* Quarterly Journal of Economics, February 1956, pp. 65-94.
- [5] О. Замулин, К. Сонин. *Макроэкономика*. Рукопись.