**Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2013/14 уч. год**
**Дифференциальные уравнения**
**Доп. ДЗ№B: дифференциальные 1-формы возвращаются (9.05.2014)**
*И. А. Хованская, И. В. Щуров, П. Ф. Солматин, А. Петрин, Н. Солодовников*

# 1 Замены координат

## 1.1 Векторные и ковекторные пространства

**Задача 1.** Найдите координаты точки $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ в новых системах координат

(a) $(u, v) = (y, -x)$.
(b) $(u, v) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)$.

Очевидно, что значение линейной функции на векторе не зависит от способа записи в координатах этого вектора и этой линейной функции.

**Задача 2.** Рассмотрим одномерное векторное постранство с координатой $x$. В пространстве ковекторов базисом будет форма $dx$. Рассмотрим вектор $v$, имеющий координату $x = 2$, и ковектор $\omega = 3\,dx$.
(a) Найти значение ковектора $\omega$ на векторе $v$.
(b) Сделаем замену координат: $y = 4x$. Найти координату вектора $v$ в новой системе координат.
(c) Найти ковектор $\omega$ в новых координатах, то есть выразить его в виде $\omega = c\,dy$. Для этого нужно найти такое число $c$, чтобы значение ковектора на векторе $v$ осталось неизменным.
(d) Как меняются координаты векторов при замене координат в одномерном пространстве? Как меняются координаты ковекторов?

**Задача 3.** Выберем в качестве базиса на пространстве ковекторов формы $dx$ и $dy$. Рассмотрим на плоскости вектор $v = (v^1, v^2)$ и ковектор $\omega = (\omega_1, \omega_2) = \omega_1 dx + \omega_2 dy$. Кроме этого рассмотрим произвольную линейную замену координат

$$\xi = ax + by,\ \eta = cx + dy.$$

(a) Запишите в координатах значение $\omega$ на $v$ (то есть запишите формулу, с помощью которой можно посчитать значение $\omega$ на $v$, зная координаты $\omega$ и $v$).
(b) Запишите координаты вектора $v$ в системе координат $(\xi, \eta)$.
(c) Какие координаты у ковектора $\omega$ в системе координат $(\xi, \eta)$? Почему?

## 1.2 Точечно-векторные пространства

До сих пор в этом листке мы рассматривали линейные пространства, элементами которых были векторы и линейные функционалы (ковекторы). Сейчас мы переходим к более сложно устроенным пространствам, которые можно было бы назвать точечно-векторными. Такое пространство состоит из точек, к каждой из которых можно прикладывать векторы. При этом векторы, приложенные к одной и той же точке, можно между собой складывать (они образуют векторное пространство), но векторы, приложенные к разным точкам, складывать нельзя.

Векторные поля, являющиеся правыми частями дифференциальных уравнений, «живут» в таких точечно-векторных пространствах: в каждой точке фазового пространства приложен свой вектор. Дифференциальные формы также определены на точечно-векторных пространствах.

Посмотрим, как замены координат в точечно-векторных пространствах влияют на векторы и ковекторы, приложенные к разным точкам.

**Задача 4.** Рассмотрим единичное векторное поле на прямой: к каждой точке $x$ приложен единичный вектор. Ему соответствует дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = 1 \tag{1}$$

Рассмотрим замену координат $y = g(x)$. Выберем какую-нибудь точку $P$ с координатой $x = a$.

(a) Найти координату точки $P$ в новой системе координат.
(b) Найти вид уравнения (1) в новой системе координат.
(c) Найти координаты вектора, приложенного к точке $P$, в новой системе координат.
(d) Проделать те же самые пункты с уравнением $\dot{x} = v(x)$ для произвольного векторного поля $v$.

**Задача 5.** Рассмотрим на прямой форму $f(x)dx$ и замену координат $x = g(u)$. Как в новой системе координат записывается форма?

**Задача 6.** Пусть $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ — новые координаты, и задана кривая $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Касательный вектор к ней в координатах $(x, y)$ имеет вид

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}(x(t), y(t)) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)). \tag{2}$$

Докажите, что в координатах $(u, v)$ касательный вектор имеет вид

$$\dot{\gamma}(t) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial u}{\partial y}\dot{y}, \frac{\partial v}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial v}{\partial y}\dot{y}\right). \tag{3}$$

(Воспользуйтесь теоремой о производной сложной функции.)

**Замечание 1.** *При линейной замене координат на плоскости любой вектор в новой системе координат выражается линейно через свои старые координаты.*

*Нелинейное отображение плоскости $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ в каждой точке можно приблизить линейным действием на приложенных к этой точке векторах. Матрица линейного отображения задается равенством правых частей уравнений (2) и (3).*

Дифференциальная 1-форма в каждой точке задаёт ковектор, определенный на векторах, прикрепленных к данной точке. Значение ковектора на данном векторе не зависит от системы координат, значение ковектора на векторе линейно зависит как от вектора, так и от ковектора, а замена координат линейно изменяет координаты векторов, прикрепленных к данной точке. Поэтому на координаты ковектора действует линейное отображение, обратное к отображению для векторов.

**Задача 7.** Проведите строго предыдущее рассуждение в координатных терминах и запишите замены координат дифференциальных 1-форм
(a) на плоскости
(b) в $n$-мерном пространстве.

## 2 Связь 1-форм и дифференциальных уравнений

Напомним, что дифференциальная 1-форма есть (гладко) зависящий от точки пространства ковектор. Точку приложения векторов могут не указывать, если она понятна из контекста.

**Задача 8.** Рассмотрим на плоскости гладкую кривую $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ и формы $dx$, $dy$. Каков геометрический смысл выражений
(a) $\dot{\gamma}(t)$,
(b) $dx(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$, $dy(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$,
(c) отношения $dy(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))/dx(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$?

**Задача 9.** Пусть плоская кривая $\gamma$ — интегральная для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{A(x, y)}{B(x, y)}. \tag{4}$$

(a) Найдите касательный вектор к кривой в точке $(x, y)$.
(b) Найдите значение 1-формы $A(x, y)dx + B(x, y)dy$ на этом касательном векторе

**Задача 10.** Форма $A(x, y)dx + B(x, y)dy$ задает на плоскости поле направлений (см. предыдущую домашнюю работу). Пусть $\gamma$ — кривая, в каждой своей точке касающаяся прямых этого поля.

Докажите, что кривая $\gamma$ — интегральная для уравнения (4).

**Замечание 2.** *В дифференциальном уравнении $\frac{dy}{dx}$ — единый формальный символ, а в дифференциальных 1-формах $dy$ и $dx$ в данной точке — пара линейных функций. Отношение их значений на некотором векторе — вещественное число, в случае декартовых координат равное тангенсу угла наклона прямой поля направлений.*

# 3 Интегрирование 1-форм

**Определение 1.** Возьмем дифференциальную 1-форму $\omega$ и гладкую кривую $\gamma$ в $n$-мерном вещественном пространстве, $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$.

*Интегралом* от формы $\omega$ вдоль кривой $\gamma$ называют

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \omega(\dot{\gamma}(t))dt. \tag{5}$$

**Задача 11.** (a) Докажите, что интеграл от формы задан корректно, то есть не зависит от способа параметризации кривой $\gamma$. Иными словами, пусть $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(s(t))$, где $s\colon [0,1] \to [0,1]$ — гладкое взаимно однозначное монотонное отображение (репараметризация). Докажите, что интеграл не изменится, если в его определении заменить $\gamma$ на $\tilde{\gamma}$. Указание: воспользуйтесь формулой замены переменных в интеграле и теоремой о производной сложной функции.

(b) Проверьте, что в одномерном случае интеграл от формы $f(x)dx$ по отрезку $[a,b]$ совпадает с интегралом Римана функции $f$ по тому же отрезку. Указание: параметризуйте отрезок $[a,b]$ как-нибудь — например, линейно отобразив на него отрезок $[0,1]$.

(c) Найдите интеграл от формы $x\,dy$ по квадрату с вершинами в точках $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$.

(d) В чем геометрический смысл интеграла от $x\,dy$ по замнкутой кривой? А от $y\,dx$?

# 4 Обоснование метода решения уравнений с разделяющимися переменными

**Задача 12.** Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad \dot{y} = g(y).$$

Пусть $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ — решение этого уравнения с начальным условием $x(0) = x_0,\ y(0) = y_0$.

(a) Докажите, что для любой точки $t$, в которой определено $\gamma(t)$, выполняется равенство

$$\frac{dy}{g(y)} = \frac{dx}{f(x)},$$

где значения форм берутся на касательном векторе к кривой $\gamma$ в точке $t$.

*Подсказка: см. задачу 9.*

(b) Пусть $(x,y)$ — некоторая точка на кривой $\gamma$. Докажите, что

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{dy}{g(y)} = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{dx}{f(x)},$$

где интеграл рассматривается как интеграл от соответсвтующей формы по кривой $\gamma$.

(c) Докажите, что

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{f(x)},$$

где интегралы рассматриваются как интегралы от соответствующей функции по соответствующей координате.