Высшая школа экономики

Факультет прикладной политологии

Математика для политологов

И. А. Хованская, Н. А. Сопрунова, И. В. Щуров, А. В. Михайлович, К. И. Сонин (РЭШ)

Задачи по теории вероятностей, часть 2

Для успешного освоения темы "Элементы теории вероятностей" студент должен уметь решать *все* перечисленные ниже задачи.

Условная вероятность

Определение 2.1. Если все элементарные исходы равновероятны, то условной вероятностью $p(A \setminus B)$ события А при условии В называется отношение количества благоприятных обоим событиям исходов к количеству элементарных исходов, благоприятных событию В.

Задача 2.2. Монетку подбросили два раза. Событие A — выпадение хотя бы одной решки, событие В — выпадение орла при первом подбрасывании монетки.

1. Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию A
2. Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию B
3. Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событиям A и B одновременно
4. Найдите вероятность события AB
5. Найдите вероятность события A при условии B.

Задача 2.3. Игральный кубик подбросили два раза. Событие A — выпадение в первый раз четвчрки, событие B — выпадение восьми очков в сумме за два раза.

1. Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию A.
2. Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию B.
3. Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событиям A и B одновременно
4. Найдите вероятность события AB.
5. Найдите вероятность события A при условии B.

Задача 2.4. Монетку подбросили четыре раза. Событие A — выпадение орла в четвчртый раз, событие B — выпадение орла трёх орлов в первые три подбрасывания.

1. Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию A.
2. Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию B.
3. Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событиям A и B одновременно
4. Найдите вероятность события AB.
5. Найдите вероятность события A при условии B.

Зависимость событий

Определение 2.5. События A и B называются независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошло или нет другое событие, то есть вероятность события A равна вероятности события A при условии B, а вероятность события B равна вероятности события B при условии A.

Задача 2.6. Монетку подбросили два раза. Нас интересует, какой стороной вверх падала монетка: орлом или решкой, интересна и последовательность выпадений, то есть выпадение сначала орла, потом решки мы отличаем от выпадения сначала решки, а потом орла. Все элементарные исходы мы считаем равновероятными. Зависимы ли события A — (выпадение орла в первый раз) и B — (выпадение орла во второй раз).

Задача 2.7. Зависимы ли события A и B

1. из задачи 11;
2. из задачи 12;
3. из задачи 13?

Задача 2.8. Известно, что среди математиков шизофреники встречаются в 10 раз чаще, чем среди людей в целом. Зависимы ли события A — (случайно взятый человек оказался математиком) и B — (случайно взятый человек оказался шизофреником)?

Задача 2.9. В одном зале собрали всех первокурсников матфака и всех первокурсников журфака. Зависимы ли события A — (случайно взятый студент оказался девочкой) и B — (случайно взятый студент учится на матфаке)?

Задача 2.10. Эдгар Аллан По в эпилоге рассказа «Мари Роже» пишет: «...обычного читателя почти невозможно убедить, что при игре в кости двукратное выпадение шестерки делает почти невероятным выпадение ее в третий раз и дает все основания поставить против этого любую сумму. Заурядный интеллект не может этого воспринять, он не может усмотреть, каким образом два броска, принадлежащие уже прошлому, могут повлиять на бросок, существующий еще пока только в будущем...» Прокомментируйте отрывок. Как же влияют первые два броска на третий? Ведь три шестёрки подряд выпадают и правда очень редко!

Задача 2.11. Игральную кость подбрасывают три раза подряд.

1. Какова вероятность события A — (выпали три шестёрки)?
2. Какую сумму бы вы согласились поставить против рубля, если бы заключали пари, что три шестёрки подряд не выпадут?
3. Пусть событие B — (в первые два броска выпали шестёрки). Какова условная вероятность события A при условии выполнения события B?
4. Какую сумму бы вы согласились поставить против рубля, если бы заключали пари, что три шестёрки подряд не выпадут, зная, что две уже выпали?

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема 2.12 (Теорема сложения вероятностей)**.** *Для любых двух событий A и B вероятность того, что хотя бы одно из событий произойдёт равна сумме вероятностей событий A и B минус вероятность их одновременного выполнения.*

Задача 2.13. Монетку подбросили четыре раза. Событие A — (выпало не меньше трёх орлов), событие B — (выпала хотя бы одна решка).

1. Перечислить элементарные исходы благоприятные событию A и найти его вероятность.
2. Перечислить элементарные исходы благоприятные событию A и найти его вероятность.
3. Перечислить элементарные исходы благоприятные событию $A + B$ (выполняется хотя бы одно из событий A и B) и найти его вероятность.

4. Перечислить элементарные исходы благоприятные событию AB (оба события A и B выполняются) и найти его вероятность.

5. Проверить выполнение теоремы сложения вероятностей в этом примере.

Задача 2.14. В колоде 36 карт. Случайным образом выбирают одну карту. Событие A — (выбрали туза), событие B — (выбрали пиковую карту).

1. Найти вероятности событий A и B.

2. Какие элементарные исходы благоприятны событию AB? Найти вероятность этого события.

3. Какие элементарные исходы благоприятны событию $A + B$? Найти вероятность этого события.

4. Проверить выполнение теоремы сложения вероятностей в этом примере.

5. Зависимы ли события A и B?

Теорема 2.15 (Теорема умножения вероятностей)**.** *Для двух* независимых *событий A и B вероятность того, что оба события произойдут одновременно равна произведению вероятностей событий A и B.*

Задача 2.16. Монетку подбросили два раза. Выпадение орла в первый раз и выпадение орла во второй раз будем считать независимыми событиями, выпадение орла и решки при каждом броске считаем равновероятными. Найти вероятности всех возможных исходов (РР, РО, ОР, ОО) в двух бросках.

Задача 2.17. Монетку подбросили пять раз. Выпадение орла в любой раз и выпадение орла в любой другой раз будем считать независимыми событиями, выпадение орла и решки при каждом броске считаем равновероятными. Перечислить все возможные исходы в пяти бросках, найти вероятность каждого.

Замечание 2.18. Решение задач 2.6, 2.16 и 2.17 показывают, что для рассуждений о вероятностях тех или иных сочетаний орлов и решек на брошенных монетках безразлично из какого предположения исходить: из равной вероятности всех возможных исходов или из независимости исходов разных бросков.

Задача 2.19. Монетку подбросили пять раз. Выпадение орла в любой раз и выпадение орла в любой другой раз будем считать независимыми событиями, выпадение орла и решки при каждом броске считаем равновероятными.

1. Перечислить все возможные исходы в пяти бросках, при которых выпадали только решки, найти вероятность каждого такого исхода.

2. Найти вероятность события A — (при пяти подбрасываниях монетки выпадали только решки в первые четыре раза, а в пятый раз выпал орёл)

3. Перечислить все возможные исходы в пяти бросках, при которых выпадал ровно один орёл, найти вероятность каждого такого исхода.

4. Найти вероятность события B — (при пяти подбрасываниях монетки выпал ровно один орёл)

Задача 2.20. Тормозная система автомобиля имеет два независимых контура. Вероятность отказа каждого из контуров равна $1/10000$.

1. С какой вероятностью система торможения не сработает? (для этого должны отказать оба контура)

2. Один из контуров повреждён. Чему равна вероятность отказа системы торможения? Во сколько раз она превышает вероятность отказа при двух работающих контурах?

Задача 2.21. Вероятность стать миллионером, играя в течение года на рынке F, равна $1/100$. Пусть в некотором году на этом рынке было миллион игроков. С какой вероятностью кто-нибудь из них стал миллионером? (в этой задаче можно использовать технику для вычисления — калькулятор, компьютер, а также приблизительные оценки).