Высшая школа экономики

Факультет прикладной политологии

Математика для политологов

И.А.Хованская, И.В.Щуров, К.И.Сонин (РЭШ), А.В.Михайлович, Я.Н. Шитов

9 октября 2012 г.

Лекция 6. Элементы теории вероятностей, часть 4

1 Дискретные случайные величины

Какая температура завтра будет на улице в 10 утра? Какую оценку данный студент получит на экзамене по курсу математики? Сколько будут стоить акции некоторой компании в следующем месяце? Сколько очков выпадет на игральном кубике?

Всё перечисленное — примеры случайных величин. Неформально говоря, случайная величина — это такая величина, значение которой выбирается в результате проведения случайного испытание. Поскольку исход случайного испытания заранее неизвестен, вообще говоря, неизвестно, чему будет равна случайная величина. Тем не менее, что-то о случайных величинах мы обычно всё-таки знаем. Например, если речь идет о завтрашней температуре, можно с уверенностью сказать, что она будет не меньше -300 градусов по Цельсию (из фи- зических соображений, температура в принципе не может быть меньше абсолютного нуля, то есть -273.15 градусов Цельсия), а оценка на экзамене будет не меньше нуля или не больше 10 баллов (при оценивании по десятибальной шкале). Можно получить еще больше информации о случайной величине: например, если известно, что студент успешно делал все домашние задания, разумно считать, что вероятность получения оценки больше 5 бу- дет больше, чем вероятность получения оценки ниже 4. И так далее. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1.1. *Мы подкидываем монетку три раза. Случайная величина (обозначим её за x) — число выпавших орлов.*

Нетрудно видеть, что такая величина может принимать одно из конечного множества значений — $\{0, 1, 2, 3\}$. (Этим она отличается, например, от температуры за окном.) Мы будем рассматривать только такие случайные величины.

Напомним, как устроены элементарные исходы в ситуации с подбрасыванием монетки: мы можем их кодировать последовательностями символов «О» и «Р». Например, «ООО» — все три раза выпали орлы, или «ОРО» — в первый раз выпал орёл, во второй — решка, в третий — снова орёл. (Всего элементарных исходов в этом случае $2^3 = 8$.) Теперь каждому элементарному исходу можно сопоставить значение случайной величины x, которое она принимает, если реализовался этот исход. Например, если реализовался исход «ООО», то выпало 3 орла, и значит $x = 3$. А если реализовался исход «ООР», орёл выпал всего один раз, то есть $x = 1$. (См. табл. 1.)

По таблице нетрудно видеть, что различные значения могут приниматься случайной величиной с разными вероятностями. Например, если $x = 0$, то орёл не выпадал ни разу, а значит выпали все решки. Этому событию соответствует единственный исход «РРР», и его вероятность таким образом равна 1/8. С такой же вероятностью x может принимать и значение 3. А вот для $x = 1$ возможностей гораздо больше: такому значению соответсвует три исхода, в которых выпадает ровно один орёл: «ОРР», «РРО», «РОР». Значит, вероятность события $x = 1$ равна 3/8. (См. таблицу 2.)

Таблица, в которой указано, с какой вероятностью случайная величина принимает то или иное значение, называется *распределением (дискретной) случайной величины.*

Перейдем к следующему примеру.

Пример 1.2. *Игральный кубик кидают один раз. Случайная величина y — выпавшее число очков.*

Каково распределение такой случайной величины? Она y принимает одно из 6 значений $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Каждое значение принимается с вероятностью 1/6. Таблица распределения в этом случае очень простая (см. табл. 3).

исход	значение x
OOO	3
OOP	2
OPO	2
OPP	1
POO	2
POP	1
PPO	1
PPP	0

Таблица 1: Значения случайной величины x (число орлов) при реализации различных исходов

значение x	исходы	вероятность
0	PPP	$1/8$
1	PPO, POP, OPP	$3/8$
2	OOP, OPO, POO	$3/8$
3	OOO	$1/8$

Таблица 2: Распределение значений случайной величины x

значение y	1	2	3	4	5	6
вероятность	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Таблица 3: Распределение случайной величины y