Высшая школа экономики

Факультет прикладной политологии

Математика для политологов

И.А.Хованская, И.В.Щуров, К.И.Сонин (РЭШ), А.В.Михайлович

25 сентября 2012 г.

Лекция 4. Элементы теории вероятностей, часть 2

Пространство элементарных исходов, случайное событие, вероятность.

Понятия: пространство элементарных исходов, случайное событие, вероятность, условная вероятность.

Рассмотрим такую ситуацию, в которой все исходы «равноправны», то есть встречаются одинаково часто, если повторять эксперимент много раз. Скажем, элементарные исходы «1», «2», «3», «4», «5», «6» при бросании игральной кости естественно считать равноправными (если, конечно, кость не кривая), а вот в случайном испытании «Встречу ли я динозавра, выходя сегодня из дверей университета?» исходы «да» и «нет» равноправными не являются.

Итак, *вероятностью события* A в случае равноправности элементарных исходов, мы будем называть отношение количества элементарных исходов, благоприятных событию A к общему количеству элементарных исходов.

$$p(A) = \frac{n(a)}{n(\Omega)}$$

Примеры:

1. Найдем вероятность выпадения четного числа на игральной кости.
$p(A) = n(a)/n(\Omega) = 3/6 = 1/2$, т. к. на игральной кости всего три четных числа: 2, 4, 6.

2. Найдем вероятность выпадения хотя бы одной решки при троекратном бросании монетки.
Вот все возможные исходы, их восемь:

«орел, орел, орел»
«орел, орел, решка»
«орел, решка, орел»
«орел, решка, решка»
«решка, орел, орел»
«решка, орел, решка»
«решка, решка, орел»
«решка, решка, решка»

Событию «выпала хотя бы одна решка» благоприятны семь исходов, все кроме первого. Итак, искомая вероятность: $p(A) = n(a)/n(\Omega) = 7/8$.

Заметим, что сумма вероятностей всех элементарных исходов случайного эксперимента равна единице: $n(\Omega) \times \frac{1}{n(\Omega)} = 1$.

Пример:
1. Случайный эксперимент: кидаем игральную кость. Имеем шесть возможных элементарных исходов, вероятность каждого 1/6, сумма вероятностей равна 1.

Мы будем говорить, что события A и B являются *дополнительными*, если A и B вместе составляют все пространство элементарных исходов Ω и являются несовместными.

Пример:
1. События A — на игральной кости выпало четное число и B — на игральной кости выпало нечетное число — являются дополнительными: действительно, каждое выпавшее на игральной кости число будет обязательно или четным, или нечетным.

Сумма вероятностей дополнительных событий равна единице.

Пример:
Пусть события A — на игральной кости выпало четное число и B — на игральной кости выпало нечетное число. Тогда $p(A) = 3/6 = 1/2$, т. к. событию A благоприятны три исхода: выпадение «2», «4» или «6»; $p(B) = 3/6 = 1/2$, т. к. событию B благоприятны три исхода: выпадение «1», «3» или «5». Сумма вероятностей $p(A) + p(B) = 1/2 + 1/2 = 1$.

Представим себе какое-нибудь испытание, вероятность успеха в котором мала, скажем, составляет 0,01. Проводя одно испытание, стоит ли рассчитывать на успех в нем? Скорее нет.

Будем проводить n таких испытаний, так, чтобы они не влияли друг на друга, то есть были *независимы* (Мы здесь забегаем чуть вперед — точный смысл понятия независимости в теории вероятности мы обсудим на следующей лекции.) С какой вероятностью P_n *хотя бы одно* из них будет успешным? Для того чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим другую задачу: с какой вероятностью *ни одно* из них не будет успешным? Для этого каждое испытание должно быть неуспешным.

Представим себе, что каждое из испытаний состоит в том, что мы проходим по неблагополучному городскому району. В нём живет 100 человек, из которых мы случайных образом встречаем одного при каждом посещении района. Будем считать, что эти люди занумерованы числами от 1 до 100, и люди под номерами от 1 до 99 являются добропорядочными и законопослушными гражданами, а человек под номер 100 — грабитель. Интересующее нас событие — «нас ограбили». Допустим, что мы ведем дневник, и каждый день записываем, с кем встретились. Запись в дневнике и будет «элементарным исходом» (вспомните, как мы записывали протоколы подкидывания монетки).

За один день возможно 100 различных записей (мы просто записываем число от одного до 100). Из них событию «нас ограбили» соответствует только один исход, то есть его вероятность равна $1/100 = 0{,}01$.

За два дня, возможно 100×100 записей: действительно, если записать в таблицу все возможные записи для двух дней, то она будет выглядеть так (в каждой клетке через запятую написано, с кем мы встретились в первый день, и с кем во второй):

1, 1	1, 2	1, 3	$\cdots$	1, 99	1,100
2, 1	2, 2	2, 3	$\cdots$	2, 99	2, 100
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
99, 1	99, 2	99, 3	$\cdots$	99, 99	99, 100
100, 1	100, 2	100, 3	$\cdots$	100, 99	100, 100

В такой таблице 100 строк и 100 столбцов, значит всего 10000 записей. С каждым следующим днем, количество записей будет умножаться на 100 (поскольку мы дописываем к уже имеющейся записи одно из 100 «имен», общее количество различных вариантов увеличивается в 100 раз).

Можно найти вероятность события «нас ограбили», просто пересчитав благоприятные исходы, но мы поступим иначе: рассмотрим дополнительное событие «нас не ограбили». Какие исходы ему соответствуют? В каждом столбце таблицы, кроме последнего, ему соответствуют все ячейки, кроме последней, всего 99×99 исходов. Значит, вероятность «нас не ограбили» составляет $\frac{99\times 99}{100\times 100} = (99/100)^2$.

Если мы совершаем n посещений, общее число исходов будет 100^n, и число исходов, благоприятных событию «нас не ограбили», будет 99^n (т.к. если мы не встречаемся с грабителем, то каждый день мы встречаемся с одним из 99 законопослушных граждан). Вероятность, что нас не ограбили, будет $(99/100)^n = 0{,}99^n$. Значит, вероятность того, что нас ограбили хотя бы раз составляет: $1 - p($*нас не ограбили*$) = 1 - 0,99^n$. Если мы проведем много испытаний, т. е. n будет большим числом, то эта вероятность будет большой!

$P_2 = 1 - 0,99^2 = 1 - 0,9801 = 0,0199$

$P_4 = 1 - 0,99^4 = 1 - 0,96060 = 0,0394$

$P_{10} = 1 - 0,99^{10} = 1 - 0,90438 = 0,09562$
$P_{25} = 1 - 0,99^{25} = 1 - 0,77782 = 0,22218$
$P_{50} = 1 - 0,99^{50} = 1 - 0,60501 = 0,39499$
$P_{150} = 1 - 0,99^{150} = 1 - 0,22145 = 0,77855$
$P_{1000} = 1 - 0,99^{1000} = 1 - 4,3171 \times 10^{-5} = 0,99996$

Наши вычисления показывают, что даже при проведении 25 испытаний вероятность одного события (ограбления) становится существенной, а уж при проведении 1000 испытаний, одно ограбление будет почти наверняка. Что это значит? Что здесь странного?

Пусть кто-то собирается бросить монету 8 раз. Возможно ли, вероятно ли, что человек, зритель, угадает заранее если не все, то хотя бы почти все исходы этого подбрасывания? Вероятность угадать все восемь результатов равна $p(A) = \frac{1}{2^8} \approx 0,0039$. Вероятность угадать все результаты кроме одного, какого-нибудь тоже несложно вычислить, она составит $p(B) = 8 \times \frac{1}{2^8} = 0,03125$. Итак, нас интересует выполнение хотя бы одного из этих событий, события несовместны, значит, вероятность выполнения хотя бы одного из них составит: $p(C) = p(A) + p(B) \approx 0,0039 + 0,03125 = 0,03515$. Вероятность этого события очень невелика, вряд ли стоит браться угадывать в этой ситуации. Теперь представим себе, что в аудитории находится 50 человек. С какой вероятностью никто из них не угадает почти все подбрасывания? Для этого каждый из 50 человек должен НЕ угадать, т.е. вероятность такого происшествия $(1 - 0,03515)^{50} = 0,16711$. Итак, с вероятностью 0,16711 никто не окажется с всего одним несовпадением, это значит, что с вероятностью $1 - 0,16711 = 0,83289$ обязательно кто-то угадает почти все. Разумеется, если единственный человек в аудитории угадывает почти все выпадения монетки, хочется думать, что этот человек обладает какими-то специальными способностями. Разумеется, здесь дело просто в том, что кто-то угадал бы с высокой вероятностью, а кто именно — дело случая.

Условная вероятность

Рассмотрим ситуацию. Во дворе играют 20 детей: 12 мальчиков и 8 девочек (см. табл. 1). Дети играют в футбол и в классики. В футбол играют 8 мальчиков и 2 девочки, в классики остальные ребята, т.е. 4 мальчика и 6 девочек. Выберем случайным образом ребенка среди играющих. С какой вероятностью он играл в футбол? Ответ следует непосредственно из определения вероятности:

$$p(F) = \frac{n(F)}{n(\Omega)} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

Теперь представим себе, что мы видим: выбранный случайным образом ребенок оказался мальчиком. С какой вероятностью он играл в футбол? Теперь изменилось и количество благоприятных исходов, и общее количество исходов.

$$p(F|M) = \frac{FM}{n(M)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

где $p(F|M)$ — вероятность того, что выбранный ребенок играет в футбол, при условии, что он оказался мальчиком, $n(FM)$ — количество мальчиков играющих в футбол, $n(M)$ — общее количество мальчиков. Посмотрим на наше вычисление внимательнее:

$$p(F|M) = \frac{\frac{n(FM)}{n(\Omega)}}{\frac{n(M)}{n(\Omega)}}$$

Здесь $p(FM)$ — вероятность того, что случайно взятый ребенок оказался мальчиком, играющим в футбол, $p(M)$ — вероятность того, что случайно взятый ребенок оказался мальчиком. Эту формулу можно воспринимать как определение *условной вероятности*: вероятностью события A при условии B называется отношение вероятности их одновременного выполнения к вероятности события B.

	классики	футбол	всего
девочки	6	2	8
мальчики	4	8	12
всего	10	10	20

Таблица 1: Дети во дворе

Важно не путать два понятия: вероятность одновременного выполнения двух событий и вероятность события A при условии B. Можно считать, что во втором случае мы рассматриваем не все элементарные исходы, а только те, что благоприятны B.

Примеры:

1. При бросании игральной кости события A — выпадение четного числа и B — выпадение числа, меньшего трех. Найдем вероятность события A при условии B, т. е. вероятность выпадения четного числа, при условии, что выпало меньше трех. Мы уже выяснили, что событие AB состоит в выпадении двойки, т. е. $p(AB) = 1/6, \quad p(B) = 2/6 = 1/3$, тогда

$$p(A|B) = \frac{p(AB)}{p(B)} = \frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{2}$$

2. Случайное испытание: троекратное бросание монетки. Случайное событие A — выпадение хотя бы двух орлов и B — выпадение хотя бы одной решки. Найдем вероятность события A при условии B, выпадение хотя бы двух орлов при условии выпадение хотя бы одной решки. Мы уже выяснили, что событию AB благоприятствуют три элементарных исхода: «орел, орел, решка», «орел, решка, орел», «решка, орел, орел». Значит, $p(AB) = 3/8, \quad p(B) = 7/8$. Итак:

$$p(A|B) = \frac{p(AB)}{p(B)} = \frac{3/8}{7/8} = \frac{3}{7}.$$