Высшая школа экономики

Факультет прикладной политологии

Математика для политологов

И.А.Хованская, И.В.Щуров, К.И.Сонин (РЭШ), Я. Н. Шитов

11 сентября 2012 г.

Лекция 2. Элементы финансовой математики, часть 2.

1 Задача о вкладчике и некоторые наводящие соображения

На предыдущей лекции была рассмотрена задача о том, как растет сумма на лицевом счете у вкладчика, положившего в банк некоторую сумму денег под сколько-то процентов годовых; материал данной лекции позволит нам проводить более тонкий анализ эффективности тех или иных банковских вкладов. Начнем с более подробного рассмотрения упомянутой задачи о вкладчике.

Предположим, что вкладчик внес в банк N_0 рублей под $k\%$ годовых (проценты начисляются с капитализацией, т.е., на всю имеющуюся сумму с учетом набежавших процентов). Нас интересует сумма N_t, которая будет на счете вкладчика по истечении t лет. Согласно условию нашей задачи значение N_1 будет на $k\%$ больше, чем значение N_0, значение N_2 — на $k\%$ больше, чем N_1, и так далее. Иными словами, мы имеем

$$N_1 = \left(1 + \frac{k}{100}\right) N_0,\ N_2 = \left(1 + \frac{k}{100}\right) N_1,\ N_3 = \left(1 + \frac{k}{100}\right) N_2,\ \text{и так далее,}$$

откуда

$$N_2 = \left(1 + \frac{k}{100}\right)\left(1 + \frac{k}{100}\right) N_0 = \left(1 + \frac{k}{100}\right)^2 N_0,$$

и, аналогично,

$$N_t = \left(1 + \frac{k}{100}\right)^t N_0, \tag{1}$$

или, что равносильно,

$$-N_0 + \frac{N_t}{\left(1 + \frac{k}{100}\right)^t} = 0. \tag{2}$$

Теперь решим несколько задач, посвященных обсуждаемому вопросу.

Задача 1.1. *Вкладчик внес в банк* 10000 *рублей под сколько-то процентов годовых (проценты начисляются с капитализацией, т.е., на всю имеющуюся сумму с учетом набежавших процентов), и получил* 14000 *рублей через* 5 *лет. Найти процентную ставку.*

Для *решения* этой задачи используем формулу (1). В условиях рассматриваемой задачи $t = 5$, $N_0 = 10000$, $N_5 = 14000$, k — неизвестная переменная (процентная ставка), которую требуется найти. Итак, согласно формуле (1)

$$\left(1 + \frac{k}{100}\right)^5 \cdot 10000 \geqslant 14000,$$

откуда $\left(1 + \frac{k}{100}\right)^5 = 1.4$, или $1 + \frac{k}{100} = \sqrt[5]{1.4} \approx 1.07$. Таким образом, $1 + \frac{k}{100} \approx 1.07$, или $\frac{k}{100} \approx 0.07$, т.е., $k \approx 7$. Иными словами, вкладчик вносил исходную сумму под 7% годовых.

Теперь рассмотрим случай, когда известны исходный взнос вкладчика, процентная ставка и сумма, которую он хотел бы видеть на своем счете, а требуется найти временной промежуток, через который эта сумма у него на счете действительно окажется.

Задача 1.2. *Вкладчик внес в банк* 10000 *рублей под* 10% *годовых (проценты начисляются с капитализацией, т.е., на всю имеющуюся сумму с учетом набежавших процентов). Сколько должно пройти лет, прежде чем сумма на счете вкладчика превысит* 1000000 *рублей?*

Решение. Мы снова используем формулу (1). В нашем случае $k = 10$, $N_0 = 10000$, t — неизвестная переменная (число лет), которую требуется найти, а N_t — число, не меньшее, чем 1000000. Итак, согласно формуле (1)

$$\left(1 + \frac{10}{100}\right)^t \cdot 10000 \geqslant 1000000,$$

откуда $\left(1 + \frac{10}{100}\right)^t \geqslant 100$, или $1.1^t \geqslant 100$. Таким образом, t — наименьшее целое число, большее или равное $\log_{1.1} 100 \approx 48.3$, значит, $t = 49$. Таким образом, 10000 "превратятся" в миллион рублей через 49 лет.

К сожалению, изложенная техника пока не позволяет нам решать вопрос об эффективности тех или иных кредитных ставок в более сложных случаях. В частности, наши методы недостаточно сильны для решения следующего примера.

Пример 1.3. *Рассмотрим такую схему кредита. Банк выдает заемщику 5000 долларов, через год снова выдает 5000 долларов, через два года заемщик возвращает 12000 долларов. Под какой процент выдан такой кредит?*

На данной лекции мы дадим способ распознавания эффективности кредитных ставок, в частности, мы приведем аппарат, позволяющий решить пример 1.3.

Пока же мы просто отметим, что решенные нами задачи 1.1 и 1.2 наводят нас на мысль о том, каким образом в принципе можно сравнивать денежные средства, относящиеся к разным временным периодам. Например, миллион рублей из задачи 1.2, который мы получим через 50 лет, стоит так мало как 10000 "сегодняшних" рублей. Аналогично, 14000 рублей из задачи 1.1 стоили бы 10000 рублей пять лет назад.

2 О стоимости, приведенной к сегодняшнему дню

Обсуждая кредит в банке, мы исходим из того, что нам известна процентная ставка кредита. В жизни часто встречаются ситуации, когда процентная ставка неизвестна: люди или организации могут договориться о сложных выплатах в разные сроки, скажем, сам кредит выдается не единовременно, а по частям, возвращение долга происходит определенными суммами через какой-то срок. Как по этим данным сказать, под какие именно проценты выдан кредит? С таким же вопросом сталкиваются люди, берущие кредит в банке, где кроме выплат по кредиту есть дополнительные выплаты — за обслуживание кредита, открытие и поддерживание счета и т. д.

Для того чтобы понять, о какой ставке идет речь, нам нужно уметь сравнивать деньги, полученные сегодня с деньгами, которые будут, скажем, через год.

Пусть процентная ставка в некотором банке для обычного вклада составляет 6% годовых. Пусть у нас есть 1000 рублей сейчас. Это значит, что мы совершенно определенно можем получить через год 1060 рублей. С другой стороны, предположим, мы знаем, что нам заплатят 1000 рублей, но только через год. В каком-то смысле, это то же самое, что мы имеем 1000/1,06 рублей сегодня: обладание именно такой суммой гарантирует нам выплату наших 1000 рублей через год. Мы будем говорить *о стоимости, приведенной к сегодняшнему дню.* Итак, если банк установил процентную ставку $a\%$, то стоимость 1000 рублей, полученных через год, приведенная к сегодняшнему дню составит $1000/\left(1 + \frac{a}{100}\right)$ рублей, стоимость 1000 рублей, полученных через два года, приведенная к сегодняшнему дню составит $1000/\left(1 + \frac{a}{100}\right)^2$ рублей, а стоимость 1000 рублей, полученных через n лет, приведенная к сегодняшнему дню составит $1000/\left(1 + \frac{a}{100}\right)^n$ рублей.

Таким образом, наши рассуждения приводят к следующему определению.

Определение 2.1. Стоимость N рублей, полученных через t лет, приведенная к сегодняшнему дню относительно ставки в $k\%$ годовых, равна

$$N_{reduced} = \frac{N}{\left(1 + \frac{k}{100}\right)^t}. \tag{3}$$

3 Эффективная процентная ставка

Вернемся опять к задаче о вкладчике, с рассмотрения которой мы начали эту лекцию. Сравним определение 2.1 и формулу (2): заметим, что слагаемые в левой части этой формулы соответствуют платежам вкладчика и банка, приведенным к сегодняшнему дню. А именно, стоимость N_0 "сегодняшних" рублей, приведенная к сегодняшнему дню равна в силу определения 2.1 $\frac{N_0}{\left(1+\frac{k}{100}\right)^0} = N_0$; стоимость N_t рублей, полученных через t лет, равна $\frac{N_t}{\left(1+\frac{k}{100}\right)^t}$. Отметим также, что слагаемое N_0 берется в формуле со знаком "минус", поскольку оно соответствует расходу вкладчика (он вносит эту сумму в банк), а слагаемое $\frac{N_t}{\left(1+\frac{k}{100}\right)^t}$ — со знаком "плюс", т.к. вкладчик забирает себе эти N_t рублей через t лет. Эти рассуждения позволяют нам обобщить формулу (2) на случай произвольного кредитного договора следующим образом.

Определение 3.1. Эффективной процентной ставкой называется такая процентная ставка, при которой сумма стоимостей всех финансовых потоков, приведенная к сегодняшнему дню, равна нулю.

Определение 3.1 позволяет распознавать эффективность кредитного договора, который связан с большим, чем 2, количеством финансовых потоков. Продемонстрируем мощь этого определения, решив пример 1.3, средств для решения которого нам оказалось недостаточно в первом разделе лекции. Итак, напомним условие и приведем решение примера 1.3.

Пример 3.2. *Рассмотрим такую схему кредита. Банк выдает заемщику 5000 долларов, через год снова выдает 5000 долларов, через два года заемщик возвращает 12000 долларов. Под какой процент выдан такой кредит?*

Решение. Пусть процентная ставка банка составляет $a\%$. Приведем к сегодняшнему дню все произведенные выплаты. Стоимость \$5000, полученных сразу, составляет \$5000, а стоимость \$5000, полученных через год составит $\$5000/\left(1+\frac{a}{100}\right)$. Стоимость возвращенных \$12000 составит $\$12000/\left(1+\frac{a}{100}\right)^2$. Чтобы были возвращены все занятые деньги, должно выполняться равенство

$$5000 + \frac{5000}{1+\frac{a}{100}} = \frac{12000}{(1+\frac{a}{100})^2}$$

Мы получили уравнение на неизвестное а. Решения этого уравнения $a_1 = -10\sqrt{265} - 150 < 0$ и $a_2 = 10\sqrt{265} - 150 \approx 12,788$. Первый корень отрицательный, второй дает нам ответ к задаче: банк выдал деньги под приблизительно $12,8\%$ годовых.

В завершение, приведем одно замечание о приведении выплат к различным временным срокам.

Замечание 3.3. *Почему финансовые потоки приводятся именно к сегодняшнему дню, а не к, скажем, дню последних выплат? Дело в том, что эффективная ставка процента не зависит от того дня, к которому приводятся платежи. Действительно, приведем в примере 3.2 все платежи к дню последней выплаты. Тогда первые \$5000 получены за два года до этого дня, а значит, на эти деньги можно было дважды получить годовые проценты. Через два года \$5000 превратятся в* $5000/\left(1+\frac{a}{100}\right)^2$. *Аналогично, вторая выплата получена за год до дня расчета, а значит, вторые \$5000 превратятся в* $1000/\left(1+\frac{a}{100}\right)$.

\$12000 возвращаются в день расчета, никаких процентов в этом случае на эти деньги не возвращается. Итак, мы получаем уравнение

$$5000 \cdot \left(1+\frac{a}{100}\right)^2 + 5000 \cdot \left(1+\frac{a}{100}\right) = 12000$$

Если разделить это равенство на $(1+\frac{a}{100})$, *мы получим то же уравнение, что и в примере 3.2.*