**Высшая школа экономики**

**Факультет прикладной политологии**

**Математика для политологов**

**И.А.Хованская, И.В.Щуров, К.И.Сонин (РЭШ)**

## 4 сентября 2012 г.

## Лекция 1. Элементы финансовой математики, часть 1.

# 1 Процентные соотношения

**Определение 1.1.** Процентом от числа называется его сотая часть.

1% от числа $A = \dfrac{A}{100}$

**Пример 1.2.** *Ставка подоходного налога в России составляет 13%. Какую сумму ежемесячно отчисляет в государственную казну человек с доходом 10 000 рублей?*

*Ответ:* $\dfrac{10000}{100} \cdot 13 = 10000 \cdot 0,13 = 1300$

Для начала, рассмотрим простую задачу.

**Задача 1.3.** В сентябре и октябре бюджет некоторого студента складывался из двух компонент: фиксированной стипендии и помощи родителей. В сентябре помощь родителей составляла 90% от всего бюджета, а в октябре — 80%. На сколько процентов изменился бюджет?

Читая условие задачи, можно подумать, что бюджет останется почти таким же, поскольку доля родительской помощи изменяется не слишком сильно. Однако, вычисления показывают, что это не так.

**Решение.** Допустим, в сентябре Ваш бюджет составлял 20 000[1] Помощь родителей составляет 90%, то есть $20\,000 \cdot \dfrac{90}{100} = 18\,000$ руб. Оставшиеся 10% (то есть 2 000) составляет стипендия.

В октябре размер стипендии не изменился. Но если доля помощи родителей в бюджете стала равной 80%, то доля стипендии стала равной 20%. Как так получается? Тут нужно понимать, что в октябре проценты берутся не от сентябрьского бюджета, а от октябрьского. Если 2 000 составляет 20% от всего бюджета, то 1% составит 100 рублей, а 100% (то есть октябрьский бюджет) составит $100 \times 100 = 10\,000$ рублей. Это ровно половина от сентябрьского бюджета. Таким образом, в октябре бюджет уменьшится вдвое!

Нетрудно видеть, что на самом деле ответ не будет зависеть от того, чему равен сентябрьский бюджет. (Проверьте вычисления, взяв сентябрьский бюджет равным 15 000 или 25 000.) Кратко, его можно подытожить следующим образом:

Поскольку доля стипендии в увеличилась в два раза, и при этом размер стипендии не изменился, значит, бюджет уменьшился в два раза. ■

Эта задача весьма показательства в смысле целей нашего курса: цифры могут вводить в заблуждение, и нам нужно научиться видеть за цифрами реальность. Для этого нужно развить некоторую математическую интуицию.

Рассмотрим еще одну задачу[2]:

**Задача 1.4.** ВВП США по данным на 2008 год составил 14 триллионов международных долларов, а ВВП Турции — 1 триллион долларов. Падение ВВП за 2009 год в этих странах составил соответственно 1 и 3 %. Найти и сравнить абсолютные показатели падения ВВП за этот год в США и Турции. (Приводятся существенно округленные данные по оценкам МВФ.)

---

[1] Мы не знаем реальный размер сентябрьского бюджета этого студента, но часто при решении математических задач бывает полезно взять неизвестные данные произвольным образом, "с потолка", и использовать их при решении. Однако, важно после этого убедиться в том, что полученный ответ действительно не зависел от выбора этих произвольных данных.

[2] Эта задача не разбиралась на лекции, но включена в конспект для полноты изложения.

**Решение.** США: 1% от 14 трлн. $= 0.01 \cdot 14 \cdot 10^{12} = 14 \cdot 10^{10} = 140$ млн

Турция: 3% от 1 трлн. = 30 млн. ■

Задачи 1.3 и 1.4 показывают, что важно не только, *сколько процентов берется,* но и от *какого числа* берутся проценты. Обычно в задаче или в тексте статьи это не указывается непосредственно, что вызывает множество ошибок. Если говорится, что некоторая величина изменилась на какое-то количество процентов, то проценты берутся именно от этой величины.

**Задача 1.5.** Цена живой воды за лето (сезон активного волшебства) выросла на 20%, а за осень (начало волшебной спячки) упала на 20%. Как изменилась цена живой воды за лето и осень вместе?

**Решение.** Пусть перед летом цена живой воды составляла $V$ денег за литр. Тогда прибавление в цене за лето составило $\frac{V}{100} \cdot 20\% = 0,2V$. Значит, после лета цена живой воды составила $V + 0,2V = 1,2V$ . Падение цены за осень составило $\frac{1,2V}{100} \cdot 20\% = 0,24V$ . Значит, цена живой воды после осени составляет $1,2V - 0,24V = 0,96V$ , а не $V$ , как можно было бы ожидать! ■

Дело здесь в том, что 20% берутся от разных чисел: в первом случае от весенней цены, а во втором - от летней.

Это очень важный пример. Разберемся в происходящем подробнее.

Что значит увеличение числа $A$ на $b$ процентов?

1% числа $A = \frac{A}{100}$

Значит, $b$% числа $A = \frac{A}{100} \cdot b = \frac{Ab}{100} = A \cdot \frac{b}{100}$

Таким образом, при увеличении числа $A$ на $b$ процентов мы получаем

$$A + A \cdot \frac{b}{100} = A\left(1 + \frac{b}{100}\right).$$

Заметим, что хоть и говорится "увеличение на" , но имеется в виду именно умножение на число $\left(1 + \frac{b}{100}\right)$ , т. е. увеличение в $\left(1 + \frac{b}{100}\right)$ раз.

Пример: что-то было 70, за год увеличилось на 10%. Сколько теперь?

$$G = 70 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 70 \cdot 1,1 = 77.$$

Что значит уменьшение числа $A$ на $b$ процентов?

$b$% числа $A = A \cdot \frac{b}{100}$

Таким образом, при уменьшении числа $A$ на $b$ процентов мы получаем

$$A - A \cdot \frac{b}{100} = A\left(1 - \frac{b}{100}\right).$$

Пример: что-то было 120, за месяц уменьшилось на 20%. Сколько теперь?

$$G = 120 \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 120 \cdot 0,8 = 96$$

Вернемся к задаче про живую воду

Первое изменение цены - умножение на $1,2$, второе - умножение на $0,8$. Новая цена $A \cdot 1,2 \cdot 0,8 = 0,96 \cdot A$

**Контрольный вопрос.** Какой будет ответ в задаче про живую воду, если изменить порядок операций: сначала цену уменьшить на 20%, а потом увеличить на те же 20%?

## 2 "Сложные" и "простые" проценты.

**Задача 2.1.** Некто в 1930 году положил в банк \$100 под 10% годовых. В 2010 году (ровно через 80 лет) Некто решил забрать свой вклад. Сколько он получит в случае:

а) Если проценты начисляются только на саму сумму вклада? (это называется *простые проценты*)

б) Если проценты начисляются на всю имеющуюся сумму, с учетом набежавших процентов? (это называется *сложные проценты*)

**Решение.**

а) Ежегодно начисляемая сумма составляет 10% от \$100, т.е. $\frac{10}{100} \times \$100 = \$10$ . Значит, за 50 прошедших лет набежало $\$10 \times 80 = \$800$ . Добавляем исходные \$100 , общая сумма составит \$900

б) Прежде чем вычислить ответ в этой задаче, посмотрим, какова будет разница в сумме вкладов за первые годы. При первом начислении процентов никакой разницы нет, при обеих схемах начислится \$10. При повторном начислении в случае б) добавится 10% от \$10, т.е. $\frac{10}{100} \times \$10 = \$1$ — очень мало, даже если сделать эту добавку 80 раз.

Так сколько же денег будет на счету через 50 лет при этой схеме начисления процентов? Очевидно, что больше \$900, но, как кажется на первый взгляд, не намного. Сколько же? \$1 000? Или, может быть, \$2 000? Или даже \$8 000?

Чтобы вычислить ответ, давайте посмотрим на эту задачу с другой стороны. Ежегодно размер вклада увеличивается на 10% , т.е. умножается на $\left(1 + \frac{10}{100}\right) = 1.1$ . Прошло 80 лет, значит, увеличение происходило 80 раз, и в 2010 году вклад составит: $100 \times 1.1^{80} \approx 204\,840$. Больше, чем *двести тысяч* долларов! Интуиция нас опять обманула — результат превзошел даже самые смелые ожидания[3]. ■

[3]На самом деле банковские проценты всегда устроены так, что инфляция "съедает" выгоду или почти полностью, или даже с избытком.