Факультет прикладной политологии, 2012-13 уч. год
Алгебра и анализ
Лекция 8. Функции, графики, темпы роста (20.11.2012)

И. А. Хованская, К. И. Сонин (РЭШ), И. В. Щуров, Я. Н. Шитов

В этой лекции речь идет о ключевом понятии экономического и финансового анализа — о математическом понятии функции и о представлении функции в виде графиков. Функции встречаются повсюду — если какой-либо показатель (ВВП, занятость, размер вклада в банке) меняется от года к году, то ряд данных — это функция, зависимость показателя от времени. Если мы смотрим на данные о выпуске фирм какой-то отрасли, мы снова можем построить функцию — зависимость выпуска какой-то фирмы от количества сотрудников, которые в ней работают. Эту зависимость можно наглядно представить в виде таблицы (например, в Excel), а можно в виде графика.

Анализируя какие-нибудь данные или описывая результаты какого-то анализа, приходится иметь дело с более хитрыми зависимостями, которые называются «производными». Например, нас может интересовать не объем выпуска фирмы в какие-то годы, а то, каким образом менялся этот объем со временем. Возможно даже, нам нужно будет говорить о скорости изменения этого объема. В этой лекции мы все время используем физические термины «расстояние», «скорость», «ускорение», хотя нам не так часто приходиться писать о пройденных расстояниях и смене скоростей. Гораздо чаще приходиться сталкиваться с такими предметами как объем ВВП его рост, количество населения и рождаемость, прирост капитала, производительность труда, темпы роста экономики и т. п. Однако если бы мы выбрали, например, объем ВВП в качестве основной переменной нашей лекции (в этом случае «расстояние» соответствовало бы приросту ВВП за год — то есть разнице между ВВП нынешнего и прошого годов, «скорость» — темпам роста ВВП, а «ускорение» — изменению темпов роста), то могли бы не заметить, что в точности та же самая лекция может быть прочитана с таким показателем как выпуск фирмы в пересчете на одного сотрудника в качестве одной переменной. (В этом случае «расстоянию» соответствовала бы производительность труда, а «скорости» — темпы роста производительности труда, которые так любят макроэкономисты.) Говорить о расстоянии, скорости и ускорении — понятиях, лишенных «экономической нагрузки», проще, и мы будем придерживаться этой терминологии.

1 Скорость и ускорение

Сравним движение двух машин. Они выезжают одновременно из пункта А и едут по дороге равномерно и прямолинейно: первая со скоростью 120 км/ч, вторая со скоростью 90 км/ч. Сколько километров проезжает каждая из машин за время t? Мы знаем скорость, а значит и ответ на этот вопрос. Первая машина проедет $S_1 = 120t$, вторая машина $S_2 = 90t$. Посмотрим на график зависимости пройденного расстояния от времени.

На графике красная линия отвечает второй, более медленной машине. Мы видим, что если смотреть на график зависимости пройденного расстояния от времени в пути, то равномерное прямолинейное движение изображается прямой линией, и чем больше скорость, тем больше угол этой прямой с осью t. Как бы мы изобразили на этом графике встречное движение? Пусть пункт B находится на пути следования машин на расстоянии 300 км от пункта A. Пусть из пункта B одновременно с этими двумя машинами выезжает третья машина, навстречу им, со скоростью 100 км/ч. На графике по оси S мы откладываем расстояние от пункта A, значит $S_3 = 300 - 100t$.

Мы видим, что в случае движения навстречу можно говорить о движении с отрицательной скоростью.

Посмотрим на всю ситуацию с точки зрения реальности. Удавалось ли кому-нибудь из вас проехать целый час ровно с одной и той же скоростью без малейших отклонений? Вряд ли.

Что же значит выражение: машина едет со скоростью 100 км/ч? Это значит, что за последний час машина проехала 100 км? Если мы быстро затормозим, показания спидометра быстро изменятся, хотя пройденное за час расстояние не сильно сократится. Может быть, интереснее измерить расстояние, пройденное за последние пять минут? За пять минут невозможно так сильно и много раз менять характер движения, как за час. Если же мы посмотрим на пройденное за последнюю минуту расстояние, то оно еще лучше будет характеризовать то, что мы привыкли в обычном, бытовом смысле понимать под скоростью: как быстро мы *сейчас* едем. Конечно же, мы можем все обсужденные величины приводить к одним единицам измерения — километрам в час, но это *не* значит, что мы обсуждаем путь, пройденный за час.

Пусть график зависимости пройденного расстояния от времени в пути выглядит так:

Как происходило движение? В течение часа мы ехали в одном направлении, потом поехали обратно. Мы можем считать, что в первый час скорость была положительной, во второй час — отрицательной.

С какой скоростью мы ехали через два часа после выезда из дома? Если мы посмотрим пройденный за последние два часа путь, то он окажется нулевым: мы вернулись в ту точку, где и были. Мы ехали с нулевой скоростью? Если мы посмотрим на путь, пройденный за последний час, то он составит (-60) км, это соответствует скорости $\frac{-60km}{1h} = -60$ км/ч. За последние полчаса было пройдено (-45) км, это соответствует скорости $\frac{-45km}{0.5h} = -90$ км/ч. Оказывается, через два часа после начала пути мы ехали довольно-таки быстро, а не стояли на месте, как могло показаться в первый момент! Итак, мы считали скорость, учитывая все меньшие и меньшие промежутки. Продолжая этот процесс, мы получим, что через два часа после начала пути мы ехали со скоростью -120 км/ч.

Процедура, которую мы использовали для определения скорости движения, применяется для измерения скорости роста любой зависимости (функции). Для любой функции построенная в каждой точке подобным способом скорость называется *производной функции* $f(x)$, обозначается $f^{'}(x)$. Посмотрим на процедуру еще раз и подробнее. Итак: мы смотрели, как изменилось пройденное расстояние (в общем случае — изменилась функция) за такой-то промежуток времени (при таком-то изменении аргумента функции), потом делили изменение функции на изменение времени (аргумента). Огрубляя можно сказать: чем меньше взятый промежуток, тем точнее ответ.

На картинке видно, что мы вычисляем отношение отрезков $[AB]$ и $[BC]$, т. е. ищем угловой коэффициент секущей. Чем меньше промежуток, тем ближе секущая к касательной. Итак (и это известно всем из школьной программы): производная — это тангенс наклона касательной, ее угловой коэффициент.

Глядя на график функции можно многое понять о ее производной: когда функция увеличивается, производная не может быть меньше нуля, когда уменьшается, не может быть больше. Если вспомнить пример со скоростью, это значит, что если мы отдаляемся от начала пути, то едем от дома с положитетьной скоростью, если приближаемся, то едем к дому с отрицательной скоростью. Если в пути произошла остановка (скорость стала равной нулю), то мы, возможно, разворачиваемся в другую сторону. А если скорость не стала нулевой, то и разворота не было.

На графике функция (изображена выше) сначала убывает, т. е. ее производная (скорость) отрицательна (график производной изображен ниже). В точке A функция перестает убывать, после этой точки функция уже возрастает, в этой точке производная (скорость) функции обращается в ноль (точка B на нижнем графике). Между точками A и C функция возрастает, ее производная положительна. После точки C функция начинает убывать, в самой точке C рост функции «останавливается» — производная обращается в ноль (точка D на нижнем графике).

Производная функции — хорошо изученный математиками инструмент исследования зависимостей. Для многих функций производные явно вычисляются, таблицами производных пользуются школьники. Посмотрим на графики некоторых из них.

1. $f(x) = 2x$

Этот график похож на график равномерного прямолинейного движения, который мы рисовали выше. Действительно, здесь производная (скорость) в каждой точке постоянна, $f^{'}(x) = 2$. Для любой линейной функции $f(x) = kx$ производная составит $f(x) = k$.

2. $f(x) = x^2$

Если у производной такой ясный физический и экономический смысл, то, может быть, имеет смысл рассмотреть и производную от производной: скорость изменения скорости? В физике скорость изменения скорости называется ускорением. Математики называют ее второй производной от функции. Для экномистов это изменение темпов роста.

Посмотрим на график функции $y = x^2$. Построим касательную в точке $x = 0{,}5$. Мы видим, что график функции лежит над касательной. Это значит, что функция растет быстрее, чем соответсвующая линейная функция. Значит, скорость роста самой функции становится больше, т. е. производная увеличивается. Действительно, если мы построим касательную в близкой точке, то угол наклона будет больше. Итак, производная функции растет, т. е. имеет положительную производную. На языке математиков — вторая производная функции положительна. Такие функии называются выпуклыми вниз (действительно, область над графиком функции имеет выпуклости вниз). Если бы y был пройденным в зависимости от времени x путем, то мы бы могли сказать, что после прохождения точки $x = 0{,}5$ ехали быстрее, чем в самой точке $x = 0,5$, скорость увеличилась. Скорость увеличивается, значит, ускорение положительно.

Рассмотрим график функции $x = \log x$ (ее график и график производной нарисован и обсужден в разделе элементарные функции). Касательная к графику, проведенная в точке $x = 1$, как и в любой другой точке, лежит над графиком функции. Это значит, что функция растет медленнее, чем соответсвующая линейная функция. Значит, скорость роста самой функции становится меньше, т. е. производная уменьшается. Действительно, если мы построим касательную в близкой точке, то угол наклона будет меньше. Итак, производная функции уменьшается, т. е. имеет отрицательную производную. На языке математиков — вторая производная функции отрицательна. Такие функции называются выпуклыми вверх (действительно, область под графиком функции имеет выпуклости вверх). Если бы y был пройденным, в зависимости от времени x, путем, то мы бы могли сказать, что после прохождения точки $x = 0{,}5$ ехали медленнее, чем в самой точке $x = 0{,}5$, скорость уменьшилась. Скорость уменьшается, значит, ускорение отрицательно.

Выпуклые вверх функции часто встречаются в экономических задачах. Обычно выпуклой вверх считают *функцию полезности*. Экономисты считают, что любое благо приносит человеку удовольствие, измеримое в некоторых единицах. Функция полезности — это зависимость количество удовольствия, доставляемого человеку некоторым товаром, процессом, объектом в зависимости от его количества. Рассмотрим удовольствие, доставляемое некоторому человеку деньгами. Если у человека было всего 100 рублей, и ему вдруг досталось еще 50 рублей, сильно ли это изменит его финансовое положение? Сильно. Можно считать, что добавочные 50 рублей доставили ему ощутимое удовольствие. Если же у человека был миллион рублей, то дополнительные 50 не сильно сказались на его материальном положении, удовольствие от этих денег будет незаметным. Это значит, что сдвиг вправо по оси x близко к нулю дает большое увеличение функции, а далеко от нуля — маленькое.