Факультет прикладной политологии, 2012-13 уч. год
Алгебра и анализ
Лекция 2. Элементы финансовой математики, часть 2 (18.09.2012)
И. А. Хованская, К. И. Сонин (РЭШ), И. В. Щуров, Я. Н. Шитов

1 Процентные пункты

Многие проблемы, связанные с процентами, носят не столько математический, сколько «лингвистический» характер. Так, мы уже обсуждали выше, что увеличение или уменьшение «на» сколько-то процентов на самом деле означает умножение на некоторое число, то есть увеличение или уменьшение «во» сколько-то раз.

Имеется еще одна проблема лингвистического толка — она связана со сравнением величин, выраженных в процентах.

Замечание 1. *Если у агента A есть* 15 *яблок, а у агента B есть* 45 *яблок, то мы говорим, что у агента B на* 30 *яблок больше, чем у агента A. Здесь нет никакой сложности. Иногда бывает нужно сравнить две величины, составляющие некоторое количество процентов от общего. Скажем, агент A обладает* 15% *пакета акций некоторого предприятия, а агент B обладает* 45% *акций того же предприятия. Если мы скажем, что у агента B пакет акций на* 30% *, чем у агента A, то это можно прочесть так: у агента B* $15 \times \left(1 + \frac{30}{100}\right)$ % *акций. Но мы имели в виду совершенно не другое! В таких случаях говорят, что у агента B на* 30 *процентных пунктов больше, чем у A. Т.е. сравнивая проценты от одного и того же числа, мы говорим, что величина больше или меньше на сколько-то процентных пунктов.*

2 «Сложные» и «простые» проценты

Задача 1. Некто в 1930 году положил в банк \$200 под 10% годовых. В 2010 году (ровно через 80 лет) Некто решил забрать свой вклад. Сколько он получит в случае:

а) Если проценты начисляются только на саму сумму вклада? (это называется простые проценты)

б) Если проценты начисляются на всю имеющуюся сумму, с учётом набежавших процентов? (это называется сложные проценты)

Решение.

а) Ежегодно начисляемая сумма составляет 10% от \$200, т.е. $\dfrac{10}{100} \times \$200 = \$20$. Значит, за 80 прошедших лет набежало $\$20 \times 80 = \$1600$. Добавляем исходные $\$200$, общая сумма составит \$1800

б) Прежде чем вычислить ответ в этой задаче, посмотрим, какова будет разница в сумме вкладов за первые годы. При первом начислении процентов никакой разницы нет, при обеих схемах начислится \$20. При повторном начислении в случае б) добавится 10% от \$20, т.е. $\dfrac{10}{100} \times \$20 = \$2$ — очень мало, даже если сделать эту добавку 80 раз.

Так сколько же денег будет на счету через 80 лет при этой схеме начисления процентов? Очевидно, что больше \$1800, но, как кажется на первый взгляд, не намного. Сколько же? \$2000? Или, может быть, \$5000? Или даже \$10000?

Чтобы вычислить ответ, давайте посмотрим на эту задачу с другой стороны. Ежегодно размер вклада увеличивается на 10% , т.е. умножается на $\left(1+\dfrac{10}{100}\right)=1.1$. Прошло 80 лет, значит, увеличение происходило 80 раз, и в 2010 году вклад составит: $200\times 1.1^{80}\approx 409680$. Больше, чем *четыреста тысяч* долларов! Интуиция нас опять обманула — результат превзошел даже самые смелые ожидания. ■

год	**простые проценты**	**сложные проценты**
1930	\$100	\$200
1931	\$200+0.1×\$200 = \$220	\$200+0.1×\$200 = \$200×1.1 = \$220
1932	\$220+0.1×\$200 = \$240	\$220 × 1.1 = \$200 × 1.1 × 1.1 = \$200 × 1.1^2 = \$242
1932	\$240+0.1×\$200 = \$260	\$220 × 1.1^3 = \$266.2
⋮	⋮	⋮
2010	\$200 + 80 × 0.1 × \$200 = \$1800	\$100 × 1.1^{80} ≈ \$409680

Таблица 1: Сложные и простые проценты: количество денег на счету по годам

Задача 2. Пусть Некто взял в банке кредит на сумму \$100000 под 10% годовых. Рассмотрим следующие возможности возвращения кредита:

а) Ежегодно Некто возвращает банку \$10000 долга и набежавшие за этот год проценты.

б) Ежегодно Некто выплачивает банку \$20000, включающие в себя проценты и погашение долга, пока не выплатит весь долг. (Это называется *аннуитетные платежи.*) В последний год, разумеется, платёж может быть другим.

Описать структуру платежей за первые годы. Каким способом долг будет выплачен быстрее?

Решение. а) Стандартные выплаты плюс проценты. (Такие платежи называются *дифференцированными.*)

Первый платёж состоит из ежегодных \$10000 и 10% от всей суммы долга:

$10000+100000\cdot\dfrac{10}{100}=20000$

После этой выплаты Некто остался должен банку \$90000, см. табл 2.

Второй платёж состоит из ежегодных \$10000 и 10% от оставшейся суммы долга:

$10000+90000\cdot\dfrac{10}{100}=19000$

После этой выплаты Некто остался должен банку \$80000

Третья выплата составит:

$10000+80000\cdot\dfrac{10}{100}=18000$

Выплата долга займёт ровно 10 лет: каждый год долг уменьшается на \$10000

б) Стандартные выплаты, включающие проценты. (Такие платежи называются *аннуитетными.*)

В первый платёж входят 10% от всей суммы кредита, остальная сумма идёт на погашение долга:

Сумма кредита	Погашение тела кредита	Проценты по кредиту	Сумма выплат за год	Тело кредита на начало следующего года
$100'000$	$10'000$	$0.1 \times 100'000 = 10'000$	$10'000 + 10'000 = 20'000$	$100'000 - 10'000 = 90'000$
$90'000$	$10'000$	$0.1 \times 90'000 = 9'000$	$10'000 + 9'000 = 19'000$	$90'000 - 10'000 = 80'000$
$80'000$	$10'000$	$0.1 \times 80'000 = 8'000$	$10'000 + 8'000 = 18'000$	$80'000 - 10'000 = 70'000$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$10'000$	$10'000$	$0.1 \times 10'000 = 1000$	$10'000 + 1000 = 11'000$	$10'000 - 10'000 = 0$

Таблица 2: Погашение кредита: дифференцированная схема

$20000 - 100000 \times \dfrac{10}{100} = 10000$

После этой выплаты Некто остался должен банку \$90000 (см. табл. 3). Во второй платёж входят 10% от оставшейся суммы кредита, на погашение долга идёт:

$20000 - 90000 \times \dfrac{10}{100} = 11000$

После этой выплаты Некто остался должен банку $\$90000 - \$11000 = \$79000$

В третий платёж входят 10% от оставшейся суммы кредита, на погашение долга идёт:

$20000 - 79000 \times \dfrac{10}{100} = 12\,100$

После этой выплаты Некто остался должен банку $\$79000 - \$12\,100 = \$66\,900$

За последующие годы выплаты будут такими:

4. $20000 = 66\,90 + 13\,310$ Долг: $66\,900 - 13\,310 = 53\,590$

5. $20000 = 53\,59 + 14\,641$ Долг: $53\,590 - 14\,641 = 38\,949$ (дальше мы округляем сумму процентов с точностью до доллара)

6. $20000 = 38\,95 + 16\,105$ Долг: $38\,949 - 16\,105 = 22\,844$

7. $20000 = 22\,84 + 17\,716$ Долг: $22\,844 - 17\,716 = 5128$

8. Оставшиеся 5128

Итак, при первой схеме платежей срок выплаты составит 10 лет, общая сумма выплат будет \$155000 , при второй схеме срок платежей будет меньше, общая сумма выплат составит \$145128. ■

Сумма кредита	Ежегодная выплата	Проценты по кредиту	Погашение тела кредита	Тело кредита на начало следующего года
$100'000$	$20'000$	$0.1 \times 100'000 = 10'000$	$20'000 - 10'000 = 10'000$	$100'000 - 10'000 = 90'000$
$90'000$	$20'000$	$0.1 \times 90'000 = 9'000$	$20'000 - 9'000 = 11'000$	$100'000 - 11'000 = 79'000$
$79'000$	$20'000$	$0.1 \times 79'000 = 7'900$	$20'000 - 7'900 = 12'100$	$79'000 - 12'100 = 66'900$
$66'900$	$20'000$	$0.1 \times 66'900 = 6'690$	$20'000 - 6'690 = 13'310$	$66'900 - 13'310 = 53'590$
$53'590$	$20'000$	$0.1 \times 53'590 = 5'359$	$20'000 - 5'359 = 14'641$	$53'590 - 14'641 = 38'949$
$38'949$	$20'000$	$0.1 \times 38'949 \approx 3'895$	$20'000 - 3'895 = 16'105$	$38'949 - 16'105 = 22'844$
$22'844$	$20'000$	$0.1 \times 22'844 \approx 2'284$	$20'000 - 2'284 = 17'716$	$22'844 - 17'716 = 5'129$
$5'128$	$5'128 + 0.1 \times 5'128 \approx 5'641$	$0.1 \times 5'128 = 513$	$5'641 - 513 = 5'128$	$5'128 - 5'1280 = 0$

Таблица 3: Погашение кредита: аннуитетная схема