Факультет прикладной политологии, 2012-13 уч. год
Алгебра и анализ
Лекция 1. Элементы финансовой математики, часть 1 (11.09.2012)
И. А. Хованская, К. И. Сонин (РЭШ), И. В. Щуров, Я. Н. Шитов

1 Процентные соотношения

Определение 1. Процентом от числа называется его сотая часть.

1% от числа $A = \dfrac{A}{100}$

Пример 1. Ставка подоходного налога в России составляет 13%. Какую сумму ежемесячно отчисляет в государственную казну человек с доходом 10 000 рублей?

Ответ: $\dfrac{10000}{100} \cdot 13 = 10000 \cdot 0,13 = 1300$

Для начала, рассмотрим простую задачу.

Задача 1. Арбуз на 99% состоит из воды (по весу). После того, как он немного подсох, в нём стало 98% воды. Как изменился его вес?

Читая условие задачи, можно подумать, что вес останется почти таким же, поскольку доля воды изменится не слишком сильно. Однако, вычисления показывают, что это не так.
Решение. Допустим, арбуз весил 10 кг. (Мы не знаем, сколько он весил на самом деле, но часто при решении математических задач бывает полезно взять неизвестные данные произвольным образом, «с потолка», и использовать их при решении. Однако, важно после этого убедиться в том, что полученный ответ действительно не зависел от выбора этих произвольных данных.) Вода составляет 99%, то есть $10 \cdot \dfrac{99}{100} = 9.9$ кг. Оставшийся 1% (то есть 0.1 кг) составляет «сухое вещество».

После того, как арбуз слегка подсох, количество сухого вещества не изменилось. Но если доля воды в арбузе стала равной 98%, то доля сухого вещества стала равной 2%. Как так получается? Тут нужно понимать, что после высыхания проценты берутся не от «исходного» арбуза, а от уже подсохшего. Если 0.1 кг составляет 2% от всего арбуза, то 1% составит 0.05 кг, а 100% (то есть вес подсохший арбуз) составит $0.05 \times 100 = 5$ кг. Это ровно половина от исходного веса арбуза. Таким образом, после усыхания арбуз станет весить вдвое меньше.

Нетрудно видеть, что на самом деле ответ не будет зависеть от того, сколько весит арбуз. (Проверьте вычисления, взяв в качестве веса арбуза 5 кг или 15 кг.) Кратко, его можно подытожить следующим образом:

Поскольку доля сухого вещества в результате усушки увеличилась в два раза, и при этом количество этого сухого вещества не изменилось, значит, общий вес арбуза уменьшился в два раза. ■

Эта задача весьма показательства в смысле целей нашего курса: цифры могут вводить в заблуждение, и нам нужно научиться видеть за цифрами реальность. Для этого нужно развить некоторую математическую интуицию.

Рассмотрим еще одну задачу[1]:

[1] Эта задача не разбиралась на лекции, но включена в конспект для полноты изложения.

Задача 2. ВВП США по данным на 2008 год составил 14 триллионов международных долларов, а ВВП Турции — 1 триллион долларов. Падение ВВП за 2009 год в этих странах составил соответственно 1 и 3 %. Найти и сравнить абсолютные показатели падения ВВП за этот год в США и Турции. (Приводятся существенно округленные данные по оценкам МВФ.)

Решение. США: 1% от 14 трлн. $= 0.01 \cdot 14 \cdot 10^{12} = 14 \cdot 10^{10} = 140$ млн

Турция: 3% от 1 трлн. = 30 млн. ■

Задачи 1 и 2 показывают, что важно не только, *сколько процентов берётся,* но и от *какого числа* берутся проценты. Обычно в задаче или в тексте статьи это не указывается непосредственно, что вызывает множество ошибок. Если говорится, что некоторая величина изменилась на какое-то количество процентов, то проценты берутся именно от этой величины.

Задача 3. Цена на нефть в октябре выросла на 20%, а за ноябрь упала на 20%. Как изменилась цена нефти за октябрь и ноябрь вместе?

Решение. Пусть перед летом цена живой воды составляла V денег за литр. Тогда прибавление в цене за лето составило $\dfrac{V}{100} \cdot 20\% = 0,2V$. Значит, после лета цена живой воды составила $V + 0,2V = 1,2V$. Падение цены за осень составило $\dfrac{1,2V}{100} \cdot 20\% = 0,24V$. Значит, цена живой воды после осени составляет $1,2V - 0,24V = 0,96V$, а не V , как можно было бы ожидать! ■

Дело здесь в том, что 20% берутся от разных чисел: в первом случае от сентябрьской цены, а во втором - от октябрьской, которая больше.

Это очень важный пример. Разберёмся в происходящем подробнее.

Что значит увеличение числа A на b процентов?

1% числа $A = \dfrac{A}{100}$

Значит, b% числа $A = \dfrac{A}{100} \cdot b = \dfrac{Ab}{100} = A \cdot \dfrac{b}{100}$

Таким образом, при увеличении числа A на b процентов мы получаем

$$A + A \cdot \frac{b}{100} = A\left(1 + \frac{b}{100}\right).$$

Заметим, что хоть и говорится «увеличение на» , но имеется в виду именно умножение на число $\left(1 + \frac{b}{100}\right)$, т. е. увеличение в $\left(1 + \dfrac{b}{100}\right)$ раз.

Пример: что-то было 70, за год увеличилось на 10%. Сколько теперь?

$$G = 70 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 70 \cdot 1,1 = 77.$$

Что значит уменьшение числа A на b процентов?

b% числа $A = A \cdot \dfrac{b}{100}$

Таким образом, при уменьшении числа A на b процентов мы получаем

$$A - A \cdot \frac{b}{100} = A\left(1 - \frac{b}{100}\right).$$

Пример: что-то было 120, за месяц уменьшилось на 20%. Сколько теперь?

$$G = 120 \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 120 \cdot 0,8 = 96$$

Вернёмся к задаче про нефть

Первое изменение цены - умножение на $1,2$, второе - умножение на $0,8$. Новая цена $A \cdot 1,2 \cdot 0,8 = 0,96 \cdot A$

Контрольный вопрос. Какой будет ответ в задаче про нефть, если изменить порядок операций: сначала цену уменьшить на 20%, а потом увеличить на те же 20%?

Обратные задачи Раньше мы решали задачи такого типа «было известное число, его изменили на сколько-то процентов (уменьшили на 20%, увеличили на 30%), спрашивается, какое число получилось? Давайте теперь решим такую задачу:

Задача 4. В результате неурожая, цены на гречку поднялись на 20%. Килограмм гречки стал стоить 120 рублей. Сколько стоил килограмм гречки до подорожания?

В этой задаче нам известен результат изменения какого-то числа, и нужно восстановить само это число. Она имеет несколько различных решений. Многие из них неправильные. Например, следующее рассуждение очень популярно, но совершенно неверно: 120 руб. $-$ 20% от 120 руб. $=$ 120 руб. $- \frac{20}{100} \cdot 120$ руб. $= 96$ руб.

Действительно, проверим наш «ответ». Если килограмм гречки до подорожания стоил 96 рублей, то после подорожания он стал стоить на 20% больше, т.е. $96 + \frac{20}{100} \cdot 96 = 115.2$, а не 120 рублей, как заявлено в условии. Не сходится.

Причина этого проста: мы берем 20% не от того числа — не от исходного, а от результата, что неверно.

Правильный способ решения, например, такой. Если цена поднялась на 20%, то она стала составлять 120% от исходной. Значит, исходная цена в $\frac{120}{100} = 1.2$ раз меньше, чем 120 рублей. Таким образом, исходная цена равна $\frac{120}{1.2} = 100$ рублей.

Можно чуть иначе записать решение. Пусть исходная цена — x рублей. Тогда после подорожания она увеличится на 20% от x, т.е. станет равна $x + \frac{20}{100}x = 1.2x$ руб. Мы знаем, что это число равно 120. Имеем уравнение:

$$1.2x = 120. \tag{1}$$

Разделив левую и правую части на 1.2, имеем: $x = 100$.

Контрольный вопрос: Товар со скидкой 30% стоит 70 рублей. Сколько стоит товар без скидки?