Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2012/13 уч. год
Линейная алгебра
Семинар 9: нильпотентный оператор, жорданова клетка (20 марта 2013 г.)

Задача 1 (Свойства нильпотентного оператора)**.** Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Найти Ae_1, Ae_2, Ae_3, Ae_4, где e_1, e_2, e_3, e_4 — стандартные базисные векторы в $\mathbb{R}^4$.
(b) Найти A^n, где n — любое натуральное число.
(c) Найти Av, где $v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4$.
(d) Найти $P(A)$, где $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$.

Задача 2 (Свойства оператора λE)**.** (a) Как выглядит произведение матриц $(\lambda E)A$, $A(\lambda E)$?
(b) Докажите, что для любой квадратной матрицы подходящего размера $(\lambda E)A = A(\lambda E)$.
(c) Раскройте скобки в выражении $(A + \lambda E)^3$, где A — некоторая матрица подходящего размера.
(d) Докажите, что для выражения $(A + \lambda E)^n$ можно применять формулу бинома Ньютона.
(e) Найдите $(N + \lambda E)^n$, где

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

— нильпотентный оператор соответствующего размера.
(f) Докажите, что если для любой квадратной матрицы A подходящего размера $AB = BA$, то $B = \lambda E$.
(g) Докажите, что если любой вектор является собственным вектором матрицы B, то $B = \lambda E$.

Задача 3. (a) Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Найдите A^2, A^3, A^n.

(b) Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите A^2, A^3, A^n.

(c) Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите A^2, A^3, A^n.

Задача 4. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Найдите собственные числа матрицы A и их алгебраические кратности.

(b) Для каждого собственного числа λ найдите размерности ядер матриц $A - \lambda E$, $(A - \lambda E)^2$, $(A - \lambda E)^3$ и так до тех пор, пока не выяснится, какой вид имеет жорданова нормальная форма матрицы A.