Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2012/13 уч. год
Линейная алгебра
Семинар 8: диагонализируемые операторы (13 марта 2013 г.)

Задача 1. Для матриц (a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ найдите корни характеристического многочлена и их алгебраические и геометрические кратности.

Задача 2. Докажите, что линейный оператор в линейном пространстве над $\mathbb{R}$ диагонализируем тогда и только тогда, когда все корни его характеристического многочлена вещественные и геометрическая кратность каждого корня равна алгебраической.

Задача 3. Пусть $\boldsymbol{A}\colon V \to V$ — линейный оператор в линейном пространстве над $\mathbb{R}$ или над $\mathbb{C}$.

(a) Докажите, что $\operatorname{Ker} \boldsymbol{A}^2 \supset \operatorname{Ker} \boldsymbol{A}$.
(b) Докажите, что $\operatorname{Im} \boldsymbol{A}^2 \subset \operatorname{Im} \boldsymbol{A}$.
(c) Докажите, что $V = \operatorname{Ker} \boldsymbol{A} \oplus \operatorname{Im} \boldsymbol{A}$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} \boldsymbol{A}^2 = \operatorname{Ker} \boldsymbol{A}$.

Задача 4. Докажите, что если оператор $\boldsymbol{A}\colon V \to V$ диагонализируемый, то $V = \operatorname{Ker} \boldsymbol{A} \oplus \operatorname{Im} \boldsymbol{A}$.

Определение 1. Пусть $V = L_1 \oplus L_2$. Линейный оператор $\boldsymbol{P}\colon V \to V$ называется проектором на L_1 параллельно L_2, если для каждого $x \in V$, такого что $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$, $\boldsymbol{P}x = x_1$.

Задача 5. Найдите $\operatorname{Ker} \boldsymbol{P}$, $\operatorname{Im} \boldsymbol{P}$, его собственные числа и собственные подпространства.

Задача 6. Докажите, что проектор диагонализируем. Что можно сказать про матрицу проектора в собственном базисе?

Задача 7. Докажите, что $\boldsymbol{P}$ — проектор тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}$.

Определение 2. Линейные операторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ коммутируют, если $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

Задача 8. (a) Докажите, что если $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — коммутирующие линейные операторы в линейном пространстве над $\mathbb{C}$, то у них есть общий собственный вектор.
(b) Приведите пример коммутирующих линейных операторов в линейном пространстве над $\mathbb{R}$, таких что у них нет общего собственного вектора.