Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2012/13 уч. год
Линейная алгебра
Семинар 7: сумма подпространств (6 марта 2013 г.)

Задача 1. Пусть подпространства $L_1 \subset \mathbb{R}^5$ и $L_2 \subset \mathbb{R}^5$ заданы как множества решений систем линейных уравнений соответственно:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 4x_5 = 0; \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 5x_4 - 8x_5 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Найдите размерности пространств L_1, L_2, $L_1 \cap L_2$, $L_1 + L_2$. Находятся ли подпространства L_1 и L_2 в общем положении?

Задача 2. Дан линейный оператор A, действующий в линейном пространстве V над $\mathbb{R}$. Для λ, $\mu \in \mathbb{R}$, где $\lambda \neq \mu$, рассматриваются множества $L_\lambda = \{x \in V : Ax = \lambda x\}$ и $L_\mu = \{x \in V : Ax = \mu x\}$.

(a) Докажите, что L_λ и L_μ — подпространства.
(b) Докажите, что $L_\lambda \cap L_\mu = \{0\}$.
(c) Докажите, что сумма $L_\lambda + L_\mu$ — прямая.
(d) Докажите, что если ненулевой вектор $x \in L_\lambda + L_\mu$, и $Ax = \nu x$, то $x \in L_\lambda$ или $x \in L_\mu$ (и, соответственно, $\nu = \lambda$ или $\nu = \mu$).

Задача 3. Докажите, что $(L_1 + L_2) \cap L_3 \supset L_1 \cap L_3 + L_2 \cap L_3$. Приведите пример, в котором включение строгое.

Задача 4. Рассмотрите отображение f из пространства V функций v вида $e^{2x}P(x)$, где $P(x)$ — многочлен степени не выше 3, в пространство M многочленов степени не выше 2:

$$f(v) = e^{-2x}(v'' - 4v).$$

(a) Докажите, что f — линейный оператор.
(b) Рассмотрим в пространстве V набор векторов e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x}, x^3e^{2x}. Докажите, что это базис пространства V.
(c) Рассмотрим в пространстве M набор векторов 1, x, x^2. Докажите, что это базис пространства M.
(d) Постройте в описанных выше базисах матрицу A отображения f.
(e) Найдите пару базисов в пространствах V и M, в которых матрица D отображения f диагональна, причём на диагонали только нули и единицы.
(f) Найдите невырожденные матрицы B и C, такие что $A = BDC$.