Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2012/13 уч. год
Линейная алгебра
Семинар 5: метод Гаусса и не только (20 февраля 2013 г.)

Задача 1. Дано подпространство $L \subset \mathbb{R}^4$, $L = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$. Выпишите базис L (используйте метод Гаусса):
(a) $v_1 = (0,1,0,2)$, $v_2 = (3,2,2,7)$, $v_3 = (0,4,0,3)$, $v_4 = (1,5,1,5)$
(b) $v_1 = (0,1,0,2)$, $v_2 = (3,2,3,7)$, $v_3 = (0,4,0,3)$, $v_4 = (1,5,1,5)$.

Задача 2. Решите систему линейных уравнений:

(a) $$\begin{cases} x_2 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 19 \\ 4x_2 + 3x_4 = 3 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 = 10 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} x_2 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 15 \\ 4x_2 + 3x_4 = 8 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 = 12 \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} x_2 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 15 \\ 4x_2 + 3x_4 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 = 12 \end{cases}$$

Задача 3. Пусть матрица A есть матрица линейного оператора $f\colon L \to M$ (для некоторых фиксированных базисов в пространствах L и M). Каковы размерности пространств L и M? Найдите $f(v)$:

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ v = (1,5,3); \qquad \text{(b) } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ v = (2,1,0).$$

Задача 4. Пусть A — матрица линейного оператора $f\colon L \to M$. Найдите $\dim \operatorname{Im} f$ и $\dim \operatorname{Ker} f$ — размерности образа и ядра оператора f:

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Рассмотрим три линейных пространства: M_1, M_2, M_3. Пусть в каждом из них зафиксирован какой-то базис. Рассмотрим линейные отображения $f\colon M_1 \to M_2$ и $g\colon M_2 \to M_3$. Пусть отображение f задается матрицей A и отображение g задается матрицей B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Положим $h = g \circ f$ (то есть h — результат последовательного применения f и g; иными словами, $h(v) = g(f(v))$).

(a) Доказать, что h — линейное отображение.
(b) Чему равняется $f(1,0)$? $g(f(1,0))$?
(c) Чему равняется $f(0,1)$? $g(f(0,1))$?
(d) Записать матрицу для линейного отображения h. Она называется *произведением* матриц BA.

Задача 6. Для матриц A и B найдите их произведения AB и BA:
(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Определение 1. Множество матриц n на k с элементами в поле вещественных чисел обозначается $Mat_{n\times k}\mathbb{R}$.

Задача 7. Какие из следующих множеств с операциями являются полугруппами? (Полугруппа — это почти то же самое, что группа, но без требования существования обратного элемента.)

$$\text{(a) } \{Mat_{n\times k}\mathbb{R}, +\}, \qquad \text{(b) } \{Mat_{n\times n}\mathbb{R}, \times\}, \qquad \text{(c) } \{Mat_{n\times k}\mathbb{R}, \times\}.$$

Задача 8. Если записать матрицу A, поменяв местами строки и столбцы, получится *транспонированная* матрица A^T.
(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 4 & 7 & -5 \end{pmatrix}$. Найдите A^T.
(b) Докажите, что $(AB)^T = B^T A^T$ (проверьте, что элементы стоящие i-ой строке в j-ом месте в матрицах равны)

Задача 9. Пусть в пространстве L имеются два базиса: $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ и $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$, связанные следующим образом:

$$e'_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad e'_2 = e_1 - e_2 + e_3, \quad e'_3 = e_1 + 2e_3.$$

Найти координаты в базисе $\mathcal{E}$ вектора v, имеющего следующие координаты в базисе $\mathcal{E}'$:

$$\text{(a) } (1,0,0), \quad \text{(b) } (0,1,0), \quad \text{(c) } (1,2,3), \quad \text{(d) } (x_1, x_2, x_3).$$