

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2012/13 уч. год

Линейная алгебра

Семинар 4: ядра — чистый изумруд (13 февраля 2013 г.)

Задача 1. Рассмотрим линейное отображение $F : L \rightarrow M$. Пусть e_1, e_2, e_3 — базис в пространстве L и f_1, f_2, f_3, f_4 — базис в пространстве M . Известно, что

$$F(e_1) = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 \quad (1)$$

$$F(e_2) = f_3 - f_4 \quad (2)$$

$$F(e_3) = 2f_2 + f_3 \quad (3)$$

- (a) Чему равно $F(e_1 + e_2 + e_3)$?
- (b) Чему равно $F(2e_1 - 3e_2 + 4e_3)$?
- (c) Записать матрицу линейного отображения F в заданных базисах.

Задача 2. Даны линейные пространства V и W над полем вещественных чисел. Пространство V — двумерное, пространство W — трехмерное. Линейное отображение пространства V в пространство W в базисах (e_1, e_2) и (g_1, g_2, g_3) задано матрицей

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; (2) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для обоих случаев найдите

- (a) образы базисных векторов, выразите их в координатах и как линейную комбинацию базисных;
- (b) образ вектора $x = 2e_1 - 3e_2$, выразите в координатах и как линейную комбинацию базисных;
- (c) ядро и образ отображения, найдите базис ядра отображения.

Задача 3. Рассмотрим пространство V функций вида $P(x)e^x$, где $P(x)$ — многочлен степени не выше 2.

- (a) Докажите, что они образуют линейное пространство.
- (b) Найдите какой-нибудь базис и размерность этого пространства.
- (c) Найдите какой-нибудь базис пространства многочленов не выше 2.
- (d) Рассмотрим отображение из первого пространства во второе $F(P(x)e^x) = P'(x)$. Является ли оно линейным?
- (e) Найдите образы базисных векторов из пункта (3b). Запишите матрицу отображения в базисах из пунктов (3b) и (3c). Найдите ядро и образ.
- (f) Рассмотрим отображение из V в V : $F(Q(x)) = Q'(x)$ (здесь $Q(x) = P(x)e^x$). Докажите, что оно линейное, найдите его матрицу в базисе из пункта (3b). Найдите ядро и образ.