Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2012/13 уч. год
Линейная алгебра
Семинар 3: базис и размерность (06 февраля 2013)

Задача 1. Являются ли линейно зависимыми системы $\{\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{0\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{x\} \subset \mathbb{R}^n$, где $x \neq 0$, $\{x, x\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{(1,0),(1,1),(1,2)\} \subset \mathbb{R}^2$?

Задача 2. Пусть система $X = \{x_1, \ldots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$, а система $X_1 = \{x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}\}$.

(a) Верно ли, что если система X линейно независимая, то система X_1 тоже линейно независимая?

(b) Верно ли, что если система X линейно независимая, то система X_1 линейно зависимая?

(c) Верно ли, что если система X линейно зависимая, то система X_1 линейно зависимая?

(d) Сформулируйте утверждения, контрапозитивные к утверждениям пунктов (2a), (2b), (2c).

Задача 3. Пусть система векторов $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ образует базис в линейном пространстве V. Тем самым если вектор $x \in V$ представить в виде $x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n$, то набор чисел $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ называется *координатами* вектора x в базисе $\mathcal{E}$. Докажите, что любой вектор x однозначно определяется своими координатами ξ в базисе $\mathcal{E}$.

Задача 4. Векторы a и b образуют базис пространства $\mathbb{R}^2$. Пусть $c = a + b$, $d = a - b$.

(a) Найти координаты векторов c и d в базисе (a, b).

(b) Является ли пара векторов (c, d) базисом этого пространства?

(c) Найти координаты векторов a и b в базисе (c, d).

Задача 5. (a) Дан набор векторов $(1,2,3,-6)$, $(-4,8,3,-7)$, $(2,-1,3,-4)$, $(5,2,-6,-1)$, $(4,-4,0,0)$. Дополните набор из первых двух векторов до максимального линейно независимого набора. Сколько векторов в этом наборе? Что это значит?

(b) Дан набор векторов $(1,2,3,-6)$, $(-4,8,3,-7)$, $(2,-1,3,-4)$, $(5,2,-6,-1)$, $(4,-4,0,1)$. Набор отличается от предыдущего последней координатой последнего вектора. Попробуйте угадать, сколько будет векторов в максимальном наборе. Дополните набор из первых двух векторов до максимального линейно независимого набора. Сколько векторов в этом наборе?

Задача 6 (Базисы в пространстве многочленов степени не выше n)**.**

(a) Пусть a — любое число. Докажите, что многочлены 1, $(x-a)$, $(x-a)^2$, $\ldots$, $(x-a)^n$ образуют базис в пространстве многочленов степени не выше n.

(b) Найдите координаты многочлена $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ в этом базисе.

Замечание 1. *Первые два пункта разобраны на лекции. На семинаре их нужно разобрать, только если по ним есть вопросы.*

(c) Постройте многочлен f степени 3 такой, что $f(-3) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$, $f(10) = 0$.

(d) Постройте многочлен g степени 3 такой, что $g(-3) = 1$, $g(1) = 0$, $g(2) = 0$, $g(10) = 0$.

(e) Постройте многочлен h степени 3 такой, что $h(-3) = 2$, $h(1) = 3$, $h(2) = 0$, $h(10) = 0$.

(f) Постройте многочлен m степени 3 такой, что $m(-3) = 2$, $m(1) = 3$, $m(2) = 1$, $m(10) = 4$.

(g) Пусть x_0, x_1, …, x_n — попарно различные числа. Рассмотрим многочлены

$$f_k(x) = \frac{\prod_{\substack{0 \le i \le n \\ i \ne k}} (x - x_i)}{\prod_{\substack{0 \le i \le n \\ i \ne k}} (x_k - x_i)}.$$

Найдите степень многочлена f_k.

(h) Найдите значение многочлена f_k в точках x_0, …, x_n.

(i) Пусть $y_0, \ldots, y_n$ — ещё один набор чисел. Найдите значение многочлена

$$\sum_{k=0}^{n} y_k f_k$$

в точках x_0, …, x_n.

(j) Постройте линейную комбинацию многочленов f_k такую, что $f(x_i) = c_i$, где c_i — некоторый данный набор чисел. Полученная формула называется *интерполяционным многочленом Лагранжа.*

(k) Постройте многочлен степени не выше трёх, такой, что $f(-1) = 2$, $f(0) = 3$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$.

(l) Докажите, что многочлены f_0, …, f_n образуют базис в пространстве многочленов степени не выше n.

Указание. Многочлен степени n имеет не более чем n корней. Если у двух многочленов степени n совпадают значения в $(n + 1)$ точке, значит, их разность обращается в $n + 1$ точке в ноль.