Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2012/13 уч. год
Линейная алгебра
Семинар 2: комплексные числа, линейные функционалы, базис (30 января 2013 г.)

И. А. Хованская, С. В. Головань, А. М. Малокостов, А. Пушкарь

Задача 1. Вычислить

(a) $(5-6i)-(3+2i)$ (b) $(2+5i)(4-i)$ (c) $\overline{12+7i}$ (d) $\dfrac{1+4i}{3+2i}$ (e) i^{100} (f) $\sqrt{-25}$

Задача 2. Доказать, что для любых z, $w \in \mathbb{C}$

(a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ (b) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ (c) $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

Задача 3. Решить уравнения

(a) $x^2+2x+5=0$ (b) $x^6+2=0$ (c) $x^3-x^2+x-1=0$

Задача 4. Записать в полярных координатах

(a) $-3+3i$
(b) $3+4i$
(c) zw, z/w, $1/z$, где $z = \sqrt{3}+i$, $w = 1+\sqrt{3}i$

Задача 5. Вычислить $(1+i)^{20}$.

Задача 6. Представьте в виде $x+iy$

(a) $e^{i\pi/2}$ (b) $e^{2+i\pi}$ (c) $e^{\pi+i}$

Задача 7. Докажите, что

(a) $\cos x = \cosh ix$ (b) $i\sin x = \sinh ix$

Задача 8. Какие из функционалов на линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ являются линейными?

(a) $f(x_1,\dots,x_n) = x_1$
(b) $f(x_1,\dots,x_n) = x_1 - x_4$ (здесь $n \geqslant 4$)
(c) $f(x_1,\dots,x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$
(d) $f(x_1,\dots,x_n) = x_1^2$
(e) $f(x_1,\dots,x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$
(f) $f(x_1,\dots,x_n) = 0$
(g) $f(x_1,\dots,x_n) = 7$
(h) $f(x_1,\dots,x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + 5$

Задача 9. Какие из функционалов на пространстве непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ являются линейными?

(a) $\varphi(f) = f(0)$
(b) $\varphi(f) = f(0) + f(1)$
(c) $\varphi(f) = f(0) + 5$
(d) $\varphi(f) = 0$
(e) $\varphi(f) = \int_0^1 f(x)dx$
(f) $\varphi(f) = \int_0^1 f(x)dx + 1$
(g) $\varphi(f) = \int_{1/2}^1 f(x)dx$
(h) $\varphi(f) = \int_0^1 xf(x)dx$
(i) $\varphi(f) = \int_0^1 g(x)f(x)dx$, где $g(x)$ — данная непрерывная на $[0,1]$ функция

Задача 10. Докажите, что $\mathbb{C}$ является линейным пространством над $\mathbb{R}$. Найдите в нем какой-нибудь базис.

Задача 11. Векторы a и b образуют базис пространства $\mathbb{R}^2$. Пусть $c = a+b$, $d = a-b$.

(a) Найти координаты векторов c и d в базисе (a,b).
(b) Является ли пара векторов (c,d) базисом этого пространства?
(c) Найти координаты векторов a и b в базисе (c,d).

Задача 12 (Базисы в пространстве многочленов степени не выше n)**.**

(a) Пусть a — любое число. Докажите, что многочлены 1, $(x-a)$, $(x-a)^2$, $\ldots$, $(x-a)^n$ образуют базис в пространстве многочленов степени не выше n.
(b) Найдите координаты многочлена $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ в этом базисе.
(c) Постройте многочлен f степени 3 такой, что $f(-3) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$, $f(10) = 0$.
(d) Постройте многочлен g степени 3 такой, что $g(-3) = 1$, $g(1) = 0$, $g(2) = 0$, $g(10) = 0$.
(e) Постройте многочлен h степени 3 такой, что $h(-3) = 2$, $h(1) = 3$, $h(2) = 0$, $h(10) = 0$.
(f) Постройте многочлен m степени 3 такой, что $m(-3) = 2$, $m(1) = 3$, $m(2) = 1$, $m(10) = 4$.
(g) Пусть x_0, x_1, $\ldots$, x_n — попарно различные числа. Рассмотрим многочлены

$$f_k(x) = \frac{\prod_{\substack{0\le i\le n\\ i\ne k}}(x - x_i)}{\prod_{\substack{0\le i\le n\\ i\ne k}}(x_k - x_i)}.$$

Найдите степень многочлена f_k.

(h) Найдите значение многочлена f_k в точках x_0, $\ldots$, x_n.
(i) Пусть $y_0, \ldots, y_n$ — ещё один набор чисел. Найдите значение многочлена

$$\sum_{k=0}^n y_k f_k$$

в точках x_0, $\ldots$, x_n.

(j) Постройте линейную комбинацию многочленов f_k такую, что $f(x_i) = c_i$, где c_i — некоторый данный набор чисел. Полученная формула называется *интерполяционным многочленом Лагранжа.*

(k) Постройте многочлен степени не выше трёх, такой, что $f(-1) = 2$, $f(0) = 3$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$.

(l) Докажите, что многочлены $f_0, \ldots, f_n$ образуют базис в пространстве многочленов степени не выше n.

Указание. Многочлен степени n имеет не более чем n корней. Если у двух многочленов совпадают значения в $n+1$ точке, значит, их разность обращается в $n+1$ точке в ноль.