

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2012/13 уч. год  
Линейная алгебра  
Знакоопределенность квадратичных форм (29 апреля 2013)

**Задача 1.** Найдите все значения параметра  $\lambda$ , при которых следующие квадратичные формы положительно определены:

- (а)  $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ ;  
(б)  $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$ .

**Задача 2.** Квадратичная форма в некотором базисе  $\mathbb{R}^n$  задана матрицей  $E + A^T A$ , где  $A$  — некоторая матрица размера  $m \times n$ . Докажите, что она положительно определена.

**Задача 3.** Приведите пример квадратичной формы в  $\mathbb{R}^3$ , такой что все ее угловые миноры неотрицательные, но сама форма не является положительно полуопределенной.

**Задача 4.** Докажите, что квадратичная форма  $q(x)$  отрицательно определена тогда и только тогда, когда форма  $-q(x)$  положительно определена. Сформулируйте критерий Сильвестра отрицательной определенности квадратичной формы, заданной симметричной матрицей.

**Задача 5.** Какие кривые на плоскости задают следующие уравнения? Нарисуйте их.

- (а)  $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 2y - 9 = 0$ ;  
(б)  $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 34x - 38y - 9 = 0$ .

Рассмотрите левые части этих уравнений как функции от  $x$  и  $y$ . Как вы думаете, какие точки плоскости могут быть подозрительными на экстремум? Проверьте, есть ли там экстремумы на самом деле.