

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2012/13 уч. год  
 Линейная алгебра  
 Ортогонализация (17 апреля 2013)

**Задача 1.** Пусть стандартный базис в  $\mathbb{R}^4$  ортонормирован. Найти ортогональный базис в подпространстве

- (a)  $K = \langle (3, 0, 0, 0), (6, 2, 0, 1), (3, 2, 1, 1) \rangle$   
 (b)  $L = \langle (1, 2, 3, 4), (3, 3, 3, 3), (5, 4, 3, 2), (5, 6, 7, -2) \rangle$

**Задача 2.** Скалярное произведение в  $\mathbb{R}^4$  задано билинейной формой, матрица которой в стандартном базисе имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти ортонормированный базис в подпространстве

- (a)  $K = \langle (2, 0, -2, 2), (1, 1, -1, 1), (2, 2, -3, 3) \rangle$   
 (b)  $L = \langle (2, 0, -2, 2), (1, 1, -1, 1), (2, 2, -3, 3), (3, -1, -3, 2) \rangle$

**Задача 3.** Пусть стандартный базис в  $\mathbb{R}^5$  является ортонормированным. Найти ортогональный базис в подпространстве, заданном системой уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

**Задача 4.** В евклидовом пространстве  $V$  над полем  $\mathbb{R}$  даны два ортонормированных базиса:  $(e_1, \dots, e_n)$  и  $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ . Докажите, что матрица перехода между этими базисами ортогональная.

**Задача 5.** Найдите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 \\ 1/3 & 5/6 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix},$$

зависит ли он от  $x$ ?

**Задача 6.** Найдите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|}.$$

**Задача 7.** Рассмотрим пространство многочленов степени не выше 2. Для любых двух многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ , положим:

$$B(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

- (а) Доказать, что введенная функция  $B(f, g)$  является билинейной, симметричной и положительно определенной, и следовательно задаёт некоторое скалярное произведение.
- (б) Найти матрицу формы  $B$  в базисе  $1, x, x^2$ . Является ли этот базис ортогональным относительно скалярного произведения, заданного формой  $B$ ?
- (с) Ортогонализировать базис  $1, x, x^2$  относительно такого скалярного произведения.