

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2012/13 уч. год

Линейная алгебра

Семинар 11: билинейные формы (10 апреля 2013 г.)

Задача 1. Билинейная форма $b(x, y)$ в $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ задана в стандартном базисе (e_1, e_2, e_3) на парах базисных векторов: $b(e_1, e_1) = 3$, $b(e_1, e_2) = 2$, $b(e_1, e_3) = 4$, $b(e_2, e_1) = 1$, $b(e_2, e_2) = 5$, $b(e_2, e_3) = 2$, $b(e_3, e_1) = -1$, $b(e_3, e_2) = -2$, $b(e_3, e_3) = 6$. Найдите матрицу формы $b(x, y)$ в стандартном базисе. Является ли форма $b(x, y)$ симметричной?

Задача 2. Билинейная форма $b(x, y)$ в $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ задана в базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, где $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\bar{e}_2 = (1, 1, 0)$, $\bar{e}_3 = (1, 1, 1)$, на парах базисных векторов: $b(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = 3$, $b(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = 2$, $b(\bar{e}_1, \bar{e}_3) = 4$, $b(\bar{e}_2, \bar{e}_1) = 1$, $b(\bar{e}_2, \bar{e}_2) = 5$, $b(\bar{e}_2, \bar{e}_3) = 2$, $b(\bar{e}_3, \bar{e}_1) = -1$, $b(\bar{e}_3, \bar{e}_2) = -2$, $b(\bar{e}_3, \bar{e}_3) = 6$. Найдите матрицу формы $b(x, y)$ в стандартном базисе. Является ли форма $b(x, y)$ симметричной?

Задача 3. Билинейная форма $b(x, y)$ в $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ задана формулой $b((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_2 - x_2y_1 + 2(x_1y_3 - x_3y_1)$. Найдите матрицу формы $b(x, y)$ в стандартном базисе. Является ли форма $b(x, y)$ симметричной?

Задача 4. Рассмотрим следующую функцию на декартовом квадрате пространства всех многочленов с вещественными коэффициентами: $f(p(t), q(t)) = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt$. Докажите, что это симметричная билинейная форма.

Задача 5. Рассмотрим следующую функцию на декартовом квадрате пространства всех многочленов с комплексными коэффициентами: $f(p(t), q(t)) = \int_{-1}^1 p(t)\overline{q(t)}dt$, где черта обозначает комплексное сопряжение. Является ли эта функция билинейной формой?

Задача 6. Билинейная форма в стандартном базисе в \mathbb{R}^3 задана матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу \bar{B} этой билинейной формы в базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, где $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\bar{e}_2 = (1, 1, 0)$, $\bar{e}_3 = (1, 1, 1)$.

Задача 7. Решите систему линейных уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 9, \\ 3x - 5y + z = -4, \\ 4x - 7y + 2z = 5. \end{cases}$$

Задача 8. Убедитесь, что система линейных уравнений по правилу Крамера не решается. Решите ее каким-нибудь способом:

$$\begin{cases} 1x + 2y + 3z = 6, \\ 4x + 5y + 6z = 15, \\ 7x + 8y + 9z = 24. \end{cases}$$