

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2012/13 уч. год

Линейная алгебра

Семинар 10: жорданов базис, замена базиса (3 апреля 2013 г.)

Задача 1. Дана матрица (см. семинар 9)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

- Найдите собственные числа матрицы A и их алгебраические кратности.
- Для каждого собственного числа λ найдите ядра матриц $A - \lambda E$, $(A - \lambda E)^2$, $(A - \lambda E)^3$ и так до тех пор, пока у этих ядер перестанет расти размерность.
- Найдите жорданов базис матрицы A .

Задача 2. Квадратная матрица A третьего порядка трактуется как линейный оператор в \mathbb{R}^3 . Известно, что векторы

$$x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

являются собственными векторами оператора A . Кроме того, известно, что $A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу A .

Задача 3. Известно, что векторы $x_1 = (2, 1, 2)$, $x_2 = (2, -2, -1)$, $x_3 = (-1, -2, 2) \in \mathbb{R}^3$ являются собственными векторами оператора f , и им соответствуют собственные значения 0, 1 и 2. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\bar{x}_1 = (2, 1, 2)$, $\bar{x}_2 = (4, -1, 1)$, $\bar{x}_3 = (3, -3, 3)$.