Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2012/13 уч. год
Линейная алгебра
Семинар 1 (23 января 2013 г.)

И. А. Хованская, С. В. Головань, А. М. Малокостов, А. Пушкарь

1 Группы

Задача 1. Является ли группами по сложению:

(a) Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$
(b) Множество целых чисел $\mathbb{Z}$
(c) Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$
(d) Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$
(e) Множество $\mathbb{Z}_m$ вычетов по модулю $m \geqslant 2$, т.е. множество чисел $\{0, 1, \dots, m-1\}$ с операцией сложения $a + b := a + b \pmod m$

Задача 2. Может ли множество $\mathbb{Z}_m$ вычетов по модулю $m \geqslant 2$ с операцией умножения $a \cdot b := a \cdot b \pmod m$ являться группой по умножению? При каких m множество вычетов без нуля является группой по умножению?

Задача 3. Дано множество $G = \{a, b, c, d\}$ и операция $*$, заданная таблицей:

$*$	a	b	c	d
a	b	a	d	c
b	a	b	c	d
c	d	c	a	b
d	c	d	b	a

Образует ли пара $(G, *)$ группу?

2 Поля

Задача 4. При каких m множество $\mathbb{Z}_m$ вычетов по модулю $m \geqslant 2$ с операциями сложения из задачи 1 и умножения из задачи 2 является полем?

3 Линейные пространства

Задача 5. Являются ли линейным пространством над полем $\mathbb{Q}$ множество:

(a) Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$
(b) Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$
(c) Множество пар (p, q), где $p, q \in \mathbb{Q}$
(d) Множество пар (p, q), где $p \in \mathbb{Q}$, $q \in \mathbb{R}$

Задача 6. Является ли линейным пространством над полем вещественных чисел множество:

(a) Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$
(b) Векторное пространство $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$
(c) Множество всех функций на отрезке $[0, 1]$
(d) Множество непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$
(e) Множество целых чисел $\mathbb{Z}$
(f) Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$
(g) Множество векторов $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих соотношению $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$, где $(a_1, \dots, a_n)$ — некоторый фиксированный набор чисел
(h) Множество векторов $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих соотношению $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 5$, где $(a_1, \dots, a_n)$ — некоторый фиксированный набор чисел
(i) Множество векторов $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих соотношению $a_1x_1 + \dots + a_nx_n \geqslant 0$, где $(a_1, \dots, a_n)$ — некоторый фиксированный набор чисел
(j) Множество векторов $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих соотношениям $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ и $b_1x_1 + \dots + b_nx_n = 0$, где $(a_1, \dots, a_n)$ и $(b_1, \dots, b_n)$ — некоторые фиксированные наборы чисел
(k) Множество векторов $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих соотношению $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 7$
(l) Множество многочленов степени n (вместе с нулевым многочленом)
(m) Множество многочленов степени не выше n
(n) Множество всех функций $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$ таких, что $f(0) = 0$
(o) Множество всех функций $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$ таких, что $f(0) = 4$
(p) Множество всех функций $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$ таких, что $f(0) + f(1) = 0$
(q) Множество всех функций $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$ таких, что $f(0) = 0$ и $f(1) = 0$
(r) Множество всех функций $f(x)$ на $\mathbb{R}$ таких, что $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$
(s) Множество всех функций $f(x)$ на $\mathbb{R}$ таких, что $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
(t) Множество всех функций $f(x)$ на $\mathbb{R}$ таких, что $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
(u) Множество всех функций $f(x)$ на $\mathbb{R}$ таких, что $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$
(v) Множество всех функций $f(x)$ на $\mathbb{R}$ таких, что $f(x)$ имеет ровно одну точку разрыва
(w) Множество всех функций $f(x)$ на $\mathbb{R}$ таких, что $f(x)$ имеет не более одной точки разрыва
(x) Множество всех функций $f(x)$ на $\mathbb{R}$ таких, что $f(x)$ имеет конечное множество точек разрыва