Листок D1: Кватернионы и теорема Фробениуса

Срок сдачи: 28 марта 2013 г.

Определение D1.1. *Алгебра* A — линейное пространство над полем k с умножением $x \cdot y = z \in A$. При этом сложение связано с умножением законом дистрибутивности ($(x+y)\cdot z = x\cdot z + x\cdot x$, $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$) и $\alpha(x\cdot y) = (\alpha x)\cdot y = x\cdot(\alpha y)$.

D1 $\diamond$ 1. Докажите, что следующие пространства являются алгебрами:

(1) поле $\mathbb{R}$ над $\mathbb{R}$;
(2) поле $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$;
(3) множество многочленов;
(4) множество квадратных матриц порядка n с операцией матричного умножения;
(5) множество верхнетреугольных матриц порядка n с операцией матричного умножения;
(6) множество нижнетреугольных матриц порядка n с операцией матричного умножения;
(7) любое линейное пространство над любым полем k с нулевым умножением ($x \cdot y = 0$ для всех x, y) (так называемая нулевая алгебра).

Определение D1.2. Алгебра A называется алгеброй *с единицей*, если существует элемент $\mathbf{1} \in A$, такой что $\mathbf{1}\cdot x = x \cdot \mathbf{1} = x$ для любого $x \in A$.

D1 $\diamond$ 2. Докажите, что алгебры (1)–(6) из задачи 1 являются алгебрами с единицей.

Определение D1.3. Алгебра A называется *ассоциативной*, если $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$ для любых x, y, $z \in A$.

D1 $\diamond$ 3. Докажите, что все алгебры из задачи 1 являются ассоциативными.

Определение D1.4. *Изоморфизмом* алгебр A_1 и A_2 над полем k называется биективное отображение $\varphi\colon A_1 \to A_2$, такое что

- $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;
- $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$;
- $\varphi(x\cdot y) = \varphi(x)\cdot\varphi(y)$.

D1 $\diamond$ 4. Докажите, что алгебры верхнетреугольных матриц порядка n и нижнетреугольных матриц порядка n изоморфны.

Определение D1.5. *Алгеброй кватернионов* $\mathbb{H}$ называется алгебра размерности 4 над $\mathbb{R}$ с умножением, заданным в базисе, который обозначается как $(\mathbf{1}, i, j, k)$, следующим образом:

- $\mathbf{1}\cdot x = x\cdot\mathbf{1} = x$ ($\mathbf{1}$ — единица, а значит $\mathbb{H}$ — алгебра с единицей);
- $i^2 = j^2 = k^2 = -\mathbf{1}$ (i, j, k — мнимые единицы);
- $i\cdot j = -j\cdot i$, $i\cdot k = -k\cdot i$, $j\cdot k = -k\cdot j$ (i, j, k антикоммутируют);
- $i\cdot j = k$, $j\cdot k = i$, $k\cdot i = j$.

При этом умножение на всем $\mathbb{H}$ задается по свойствам дистрибутивности и вынесению чисел.

D1 $\diamond$ 5. Докажите, что алгебра кватернионов ассоциативна.

D1 $\diamond$ 6. Найдите следующие произведения:

(1) $(\mathbf{1} + 2i + 3j + 4k)\cdot(\mathbf{1} + i + j + k)$;
(2) $(\alpha\mathbf{1} + \beta i + \gamma j + \delta k)\cdot(\alpha\mathbf{1} - \beta i - \gamma j - \delta k)$.

D1 ◇ 7. Докажите, что если $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 \neq 0$, то для кватерниона $q=\alpha\mathbf{1}+\beta i+\gamma j+\delta k$ найдется обратный, то есть такой кватернион r, что $q \cdot r = r \cdot q = \mathbf{1}$. Чему равен это обратный кватернион?

Определение D1.6. Алгебра, в которой уравнения $a \cdot x = b$ и $x \cdot a = b$ имеют единственные решения при любых $a \neq 0$ и b называется *алгеброй с делением.*

D1 ◇ 8. Какие из алгебр, приведенных в задаче 1 являются алгебрами с делением? Является ли алгебра кватернионов алгеброй с делением?

D1 ◇ 9. Докажите, что ассоциативная алгебра является алгеброй с делением тогда и только тогда, когда в ней есть единица $\mathbf{1} \neq 0$, и любой элемент $a \neq 0$ имеет обратный.
Указание: Рассмотрите уравнения $a \cdot x = a$ и $x \cdot a = a$.

Определение D1.7. Элементы a и b алгебры A называются делителями нуля, если $a \neq 0$, $b \neq 0$, но $a \cdot b = 0$.

D1 ◇ 10. Найдите делители нуля (или докажите, что их не существует) для каждой алгебры из задачи 1 и для алгебры кватернионов.

D1 ◇ 11. Пусть A — алгебра, $a \in A$, $a \neq 0$. Рассмотрите отображение $L_a \colon A \to A$, такое что $L_a(x) = a \cdot x$. Докажите, что

(1) L_a — линейный оператор;
(2) если алгебра A является алгеброй с делением, то $\operatorname{Im} L_a = A$;
(3) если алгебра A не имеет делителей нуля, то $\operatorname{Ker} L_a = \{0\}$.

D1 ◇ 12. Докажите, что конечномерная алгебра является алгеброй с делением тогда и только тогда, когда она не имеет делителей нуля.

Определение D1.8. Говорят, что многочлен $p(t) \not\equiv 0$ *аннулирует* элемент a ассоциативной алгебры с единицей A, если $p(a) = 0$ (здесь многочлен $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_n t^n$, где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in k$ (полю, линейным пространством над которым является алгебра A) и $p(a) = \alpha_0\mathbf{1} + \alpha_1 a + \ldots + \alpha_n a^n \in A$).

D1 ◇ 13. Докажите, что для каждого элемента конечномерной ассоциативной алгебры с единицей A существует аннулирующий многочлен.
Указание: Докажите, что если $\dim A = n$, то элементы $\mathbf{1}$, a, a^2, ..., a^n линейно зависимы.

Определение D1.9. Многочлен $p_a(t)$ называется *минимальным многочленом* элемента a ассоциативной алгебры с единицей A, если это аннулирующий многочлен наименьшей возможной степени.

D1 ◇ 14. Докажите, что для каждого элемента конечномерной ассоциативной алгебры с единицей A существует минимальный многочлен $p_a(t)$.

D1 ◇ 15. Докажите, что минимальный многочлен любого элемента a алгебры без делителей нуля (если существует) является неприводимым (т. е. не разлагается на множители).

D1 ◇ 16. Докажите, что если минимальный многочлен любого элемента ассоциативной алгебры A с единицей над k является линейным, то A изоморфна k.

D1 ◇ 17. Докажите, что любая конечномерная ассоциативная алгебра с делением над $\mathbb{C}$ изоморфна $\mathbb{C}$.
Указание: Рассмотрите минимальный многочлен любого элемента a.

D1 ◇ 18. Пусть A — алгебра над полем k, а K — более широкое поле, причем $k \subset K \subset A$. Докажите, что если $a \cdot \alpha = \alpha \cdot a$ для любых $a \in A$ и $\alpha \in K$, то A является линейным пространством над K (и, соответственно, алгеброй над K).

D1 ◇ 19. Докажите, что если ассоциативная алгебра A с единицей над $\mathbb{R}$ не изоморфна $\mathbb{R}$, то найдется элемент $a \in A$, чей минимальный многочлен имеет степень 2 с отрицательным дискриминантом. Возьмите этот минимальный многочлен и с его помощью постройте такой элемент i, что $i^2 = -\mathbf{1}$.

D1 ◇ 20. Докажите, что любая конечномерная коммутативная ассоциативная алгебра с делением над $\mathbb{R}$ изоморфна либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$.
Указание: Воспользуйтесь задачами 17, 18, и 19.

В задачах 21–25 A — конечномерная ассоциативная алгебра с делением над $\mathbb{R}$, не изоморфная ни $\mathbb{R}$, ни $\mathbb{C}$.

D1 ◇ 21. Аналогично задаче 18 постройте элемент $i \in A$, такой что $i^2 = -\mathbf{1}$ и докажите, что A является линейным пространством над $\mathbb{C}$ (но не алгеброй, так как выполнение условия $a \cdot \alpha = \alpha \cdot a$ для всех $a \in A$ и $\alpha \in \mathbb{C}$ не гарантируется).
Указание: Умножать на элементы из $\mathbb{C}$ следует только *слева*.

D1 ◇ 22. Рассмотрите отображение $R_i \colon A \to A$, такое что $R_i(x) = x \cdot i$ (здесь i — элемент, построенный в задаче 21). Докажите, что R_i — линейный оператор в A как в линейном пространстве над $\mathbb{C}$.

D1 ◇ 23. Проверьте, что оператор $R_i^2 = -I$, где I — тождественный оператор. Докажите, что A распадается в прямую сумму подпространств A_i и A_{-i}, где $A_i = \{x \in A \colon R_i x = ix\}$ и $A_{-i} = \{x \in A \colon R_i x = -ix\}$.

D1 ◇ 24. Докажите, что размерности подпространств A_i и A_{-i} над $\mathbb{C}$ равны 1. Чему равна размерность подпространств A_i, A_{-i} и A над $\mathbb{R}$?
Указание: Элементы A_i коммутируют с i, так что можно воспользоваться результатом задачи 18. Для A_{-i} сначала докажите, что если $a, b \in A_{-i}$, то $a \cdot b \in A_i$.

D1 ◇ 25. Найдите в подпространстве A_{-i} элемент j, такой что $j^2 = -\mathbf{1}$, обозначьте $k = i \cdot j$ и докажите, что $(\mathbf{1}, i, j, k)$ — базис в A. Проверьте, что элементы $\mathbf{1}$, i, j, k перемножаются как кватернионы.

D1 ◇ 26 (теорема Фробениуса). Докажите, что любая конечномерная ассоциативная алгебра с делением над $\mathbb{R}$ изоморфна либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо $\mathbb{H}$.