Листок A5. Функции от матриц: не только невырожденные матрицы, не только многочлен

Линейная алгебра, **Срок сдачи: 31 мая 2013 г.**

Замечание **1.** В этом листочке мы рассматриваем матрицы над полем комплексных чисел и последовательности комплексных чисел, хотя условия задач везде вещественные. Следите за тем, чтобы в задачах с вещественными условиями получались вещественные ответы, не забывайте про формулу Эйлера. Использование компьютера для подсчётов в этом наборе задач не кажется нам вредным.

1. Кратные узлы интерполирования

Определение **2.** Пусть $f(x)$ — многочлен и $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 0$, $\ldots$, $f^{(k)}(x_0) = 0$, $f^{(k+1)}(x_0) \neq 0$, т.е. значение многочлена в точке x_0 и первые k производных равны нулю, при этом $(k+1)$-я производная нулю не равна. Число $k+1$ называется кратностью корня x_0 для многочлена $f(x)$.

A5◇1 Найдите кратности всех корней следующих многочленов:
а) $x^2 - 5x + 6$;
б) $(x-3)^7$;
в) $(x-6)^3(x+3)^4x^3$.

Определение **3.** Интерполяционным многочленом Лагранжа функции $f(x)$ с узлами интерполирования $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ кратностей $k_1, \ldots, k_n$ называется многочлен L степени $k_1 + \ldots + k_n - 1$ такой, что $\forall i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$: $L(\lambda_i) = f(\lambda_i)$; для i, таких, что $k_i > 1$, $L^{(m)}(\lambda_i) = f^{(m)}(\lambda_i)$ для всех m таких, что $1 \leqslant m \leqslant k_i - 1$.

A5◇2 **а)** Найти интерполяционный многочлен с узлами интерполирования в точках $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$ кратностей 2 и 1 соответственно для функции $f(x) = x^5$.
б) Найти интерполяционный многочлен с узлом интерполирования в точке $\lambda_1 = 0$ кратности n для функции $f(x)$. ***Указание.*** *Используйте формулу Тейлора.*
в) Найти интерполяционный многочлен с узлом интерполирования в точке λ кратности n для функции $f(x)$. ***Указание.*** *Используйте формулу Тейлора.*

A5◇3 Пусть многочлен $\chi(x)$ имеет n различных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ кратностей $k_1, \ldots, k_n$. Пусть $P(x)$ — некоторый многочлен, $R(x)$ — остаток от отделения многочлена $P(x)$ на $\chi(x)$. Пусть $L(x)$ — интерполяционный многочлен для функции $P(x)$ с узлами интерполирования в точках $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ кратностей $k_1, \ldots, k_n$. Доказать, что $L(x) = R(x)$.

A5◇4 Пусть многочлен $\chi(x)$ обнуляет оператор A, действующий в конечномерном пространстве M, $A\colon M \to M$, $\chi(A)L = 0$. Пусть $\chi(x)$ имеет n различных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ кратностей $k_1, \ldots, k_n$. Пусть $L(x)$ — интерполяционный многочлен для функции $P(x)$ с узлами интерполирования в точках $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ кратностей $k_1, \ldots, k_n$. Доказать, что $L(A) = P(A)$.

A5◇5 Пусть характеристический многочлен $\chi(x)$ матрицы A имеет n различных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ кратностей $k_1, \ldots, k_n$. Пусть $P(x)$ — некоторый многочлен, $R(x)$ —

остаток от отделения многочлена $P(x)$ на $\chi(x)$. Пусть $L(x)$ — интерполяционный многочлен для функции $P(x)$ с узлами интерполирования в точках $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ кратностей $k_1, \ldots, k_n$. Доказать, что $L(A) = P(A)$.

Замечание **4.** Мы свели задачу о нахождении многочлена от матрицы к задаче о нахождении интерполяционного многочлена Лагранжа. Заметим, что тем самым мы избавлены от необходимости искать ЖНФ и жорданов базис матрицы, только корни характеристического многочлена.

А5◇6 Используя соответствующий интерполяционный многочлен, найдите A^n для матриц

а) $\begin{pmatrix} -4 & 8 & -1 \\ -5 & 9 & -1 \\ -4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

А5◇7 Пусть характеристический многочлен $\chi(x)$ (см. определение 7 из листка А4) рекуррентного соотношения

$$a_m = c_1 a_{m-1} + \ldots + c_{k-1} a_{m-k+1} + c_k a_{m-k}$$

имеет n различных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ кратностей $k_1, \ldots, k_n$. Пусть $L_{m-1}(x)$ — интерполяционный многочлен для функции x^m с узлами интерполирования в точках $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ кратностей $k_1, \ldots, k_n$. Докажите, что

$$a_m = \Omega(T^{m-1}(\{a_n\})) = \Omega(L_{m-1}(T)(\{a_n\})),$$

где T — оператор сдвига (см. определение 3 из листка А3), а Ω — линейный функционал из определения 8 из листка А4.

А5◇8 Используя соответствующий интерполяционный многочлен, найдите формулу для n-ного члена последовательности, заданной условиями:

а) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$;

б) $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 10$;

в) $a_n = 7a_{n-1} - 16a_{n-2} + 12a_{n-3}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$.

2. Экспонента от матрицы

В курсе линейной алгебры мы уже сталкивались с многочленами от матриц. В различных областях математики встречаются и другие, более сложные функции. Рассмотрим дифференциальное уравнение $f'(x) = af(x)$, где a — некоторый параметр. Мы знаем, что решением такого уравнения будут функции вида $f(x) = ce^{ax}$, где c — любая константа, которую называют начальным условием, т.к. $f(0) = ce^{a\cdot 0} = c$. То есть, в решение этого уравнения входит функция e^{ax}. Рассмотрим теперь аналогичное уравнение в векторном виде. Пусть $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ — набор неизвестных функций, которые мы хотим найти, удовлетворяющих соотношению

$$\begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_n'(x) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix},$$

где A — заданная матрица, не зависящая от x. Чтобы аналогия была более близкой, введём следующее обозначение: пусть $F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$ — вектор-функция (вектор-столбец, каждый элемент которого функция). Будем называть производной этой вектор-функции вектор-функцию $F'(x) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_n'(x) \end{pmatrix}$. Тогда дифференциальное уравнение принимает вид $F'(x) = AF(x)$. Решением этого уравнения в векторном виде снова окажется вектор функция $F(x) = e^{Ax}c$, где c — вектор начальных условий, e^{Ax} — экспонента матрицы Ax.

Определение 5. Экспонентой e^A матрицы A мы будем называть матрицу

$$e^A = E + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots + \frac{1}{n!}A^n + \ldots$$

Пояснение. *В правой части равенства стоит бесконечная матричная сумма. Разумеется, эта сумма подразумевает предельный переход, и существование такого предела требует доказательств. В этом листочке мы не будем затрагивать вопросы сходимости, просто будем опираться на факт, что такой ряд сходится. Стоящий в знаменателе $n!$ делает факт сходимости вполне правдоподобным. Важно, что для данного определения выполняются основные свойства экспоненты, скажем $e^{A+B} = e^A e^B$. Из этого следует, например, что матрицы e^A и e^B коммутируют. Заметим, что используя ряд Тейлора, мы можем определить и другие функции от матриц.*

А5◇9 Найдите экспоненты следующих матриц, пользуясь определением:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; **д)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; **е)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$ — диагональная матрица;

з) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ — нильпотентная жорданова клетка;

и) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ — жорданова клетка.

А5◇10 Пусть матрицы A и B связаны соотношением $A = CBC^{-1}$, где C - некоторая невырожденная матрица. Докажите, что $e^A = e^{CBC^{-1}} = Ce^BC^{-1}$

Примечание. *В определении мы говорим об экспоненте матрицы, но выражение справа осмысленно для линейного оператора: мы рассматриваем некоторую бесконечную сумму степеней этого оператора. Эта задача показывает, что определение экспоненты оператора корректно: мы можем брать матрицу оператора в разных базисах, вычислять их экспоненту, полученные матрицы будут матрицей одного и того же оператора в соответствующих базисах.*

Указание. *Доказательство аналогично доказательству того, что характеристический многочлен оператора не зависит от базиса, в котором мы его записали.*

А5◇11 Для каждой матрицы найдите базис, в котором она имеет жорданов вид. Используя результат задачи 2, найдите экспоненту матрицы.

а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -3 & -8 & 7 \\ -4 & -12 & 10 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим многочлен

$$M_n(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n.$$

Будем использовать его в качестве многочлена $P(x)$ из листочка А4. Какой бы мы ни взяли многочлен $\chi(x)$, утверждение задачи А4.3 будет выполняться. Устремляя n к бесконечности и делая предельный переход, мы получаем

Утверждение 1. Пусть $L(x)$ — интерполяционный многочлен для функции e^x с узлами интерполирования в корнях характеристического многочлена матрицы A, кратность узла в каждом корне совпадает с кратностью корня. Тогда для матрицы A выполняется равенство

$$e^A = L(A).$$

А5◇12 Найдите e^{At}, где $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ следующим способом:

а) Найдите характеристический многочлен $\chi(x)$ матрицы A, его корни λ_1, λ_2 и λ_3.
б) Найдите значения интересующей нас функции $f(x) = e^{xt}$ в точках λ_1, λ_2 и λ_3. Переменную t воспринимайте как параметр.
в) Найдите многочлен второй степени $R(x)$, принимающий такие же значения в точках λ_1, λ_2 и λ_3.
г) Положите $e^{At} = R(A)$.
д) Найдите e^{At} обычным способом, проверьте, что ответы совпадают.

А5◇13 Найдите e^{At}, где $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ следующим способом:

а) Найдите характеристический многочлен $\chi(x)$ матрицы A, его корни, их кратности.

б) Найдите значения интересующей нас функции $f(x) = e^{xt}$ и столько её производных, сколько нужно в корнях характеристического многочлена. Переменную t воспринимайте как параметр.
в) Найдите многочлен второй степени $R(x)$, у которого все найденные в предыдущем пункте значения совпадают с соответствующими значениями $f(x) = e^{xt}$.
г) Положите $e^{At} = R(A)$.
д) Найдите e^{At} обычным способом, проверьте, что ответы совпадают.

3. Рациональные функции

При помощи интерполяционного многочлена Лагранжа можно искать не только целые функции (всюду дифференцируемые функции, являющиеся суммой своего ряда Тейлора с центром в нуле), но и функции с оособенностями, скажем, рациональные функции. Например, верно следующее утверждени.

Утверждение 2. Пусть многочлен $P(x)$ взаимно прост с характеристическим многочленом $\chi(x)$ матрицы A. Пусть $L(x)$ — интерполяционный многочлен функции $\dfrac{1}{P(x)}$ с узлами в корнях многочлена $\chi(x)$, кратность каждого узла равна кратности соответствующего корня $\chi(x)$. Тогда $(P(A))^{-1} = L(A)$.

A5◇14[*] **а)** Пусть $P(x)$ и $\chi(x)$ — взаимно простые многочлены. Докажите, что найдутся такие многочлены $\hat{P}(x)$ и $\hat{\chi}(x)$, что $P(x)\hat{P}(x) + \chi(x)\hat{\chi}(x) \equiv 1$. ***Указание.*** *Используйте алгоритм Евклида.*
б) Пусть $\chi(x)$ — характеристический многочлен матрицы A. Пусть $P(x)$ — некоторый многочлен, взаимно простой с $\chi(x)$. Пусть $L(x)$ — интерполяционный многочлен функции $\dfrac{1}{P(x)}$ с узлами в корнях многочлена $\chi(x)$, кратность каждого узла равна кратности соответствующего корня $\chi(x)$. Докажите, что $\hat{P}(A) = L(A)$.
в) Докажите утверждение 2.

Замечание **6.** Разумеется, для того, чтобы найти обратную матрицу, не нужно знать ни характеристический многочлен матрицы, ни его корни, это более простая задача.

A5◇15 Найдите обратную матрицу к матрице $A = \begin{pmatrix} -4 & 8 & -1 \\ -5 & 9 & -1 \\ -4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ следующим способом:
а) Найдите характеристический многочлен матрицы A, его корни, их кратности.
б) Найдите интерполяционный многочлен функции $\dfrac{1}{x}$ с узлами соответствующей кратности в корнях характеристического многочлена матрицы A.
в) Найдите A^{-1}.