Листок А4. Интерполяционный многочлен и многочлен от линейного оператора

Линейная алгебра, **Срок сдачи: 31 мая 2013 г.**

Замечание **1.** В этом листочке мы рассматриваем матрицы над полем комплексных чисел и последовательности комплексных чисел, хотя условие задач везде вещественное. Следите за тем, чтобы в задаче с вещественным условием получался вещественный ответ, не забывайте про формулу Эйлера. Использование компьютера для подсчётов в этом наборе задач не кажется нам вредным.

А4◇1 Докажите, что для любых многочленов $P(x)$ и $\chi(x)$, где $\chi(x) \not\equiv 0$ не равен тождественно нулю, существуют и единственны многочлены $Q(x)$ и $R(x)$, такие, что $P(x) = Q(x)\chi(x) + R(x)$ и $\deg R(x) < \deg \chi(x)$. Многочлен $Q(x)$ называется неполным частным, а $R(x)$ — остатком от деления $P(x)$ на $\chi(x)$.

Определение **2.** Интерполяционным многочленом Лагранжа функции $f(x)$ с простыми узлами интерполирования $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, где все λ_i различны, называется многочлен L степени не выше $(n-1)$ такой, что

$$\forall i\ (1 \leqslant i \leqslant n)\colon L(\lambda_i) = f(\lambda_i).$$

А4◇2 Докажите, что λ — простой (корень кратности 1) корень многочлена $f(x)$, если и только если $f(\lambda) = 0$, а $f'(\lambda) \neq 0$

А4◇3 Пусть многочлен $\chi(x)$ степени n имеет n различных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, т.е. $\chi(\lambda_i) = 0$ для всех i от 1 до n. Пусть $P(x)$ — некоторый многочлен, $R(x)$ остаток от деления многочлена $P(x)$ на $\chi(x)$. Пусть $L(x)$ — интерполяционный многочлен для функции $P(x)$ с простыми узлами интерполирования в точках $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Тогда $L(x) = R(x)$.

Замечание **3.** Здесь было бы уместно посмотреть задачу 1 из обязательного домашнего задания по линейной алгебре номер 2.

1. Многочлен, обнуляющий оператор

Лемма **4.** Пусть в линейном пространстве L размерности n действует линейный оператор A. Тогда найдётся многочлен $\chi(x)$ степени не выше n, такой, что $\chi(A) = 0$. Здесь 0 означает нулевой оператор I_0, т.е. такой оператор, который переводит любой вектор пространства L в ноль, $\forall x \in L\colon I_0(x) = 0$.

Замечание **5.** Доказательство этой леммы даёт, например, теорема Гамильтона–Кэли (см. ниже), но её несложно доказать и непосредственно, используя матричную запись оператора. Мы докажем ее только в двух частных случаях, демонстрирующих, как линейный оператор действует на конечномерном пространстве.

А4◇4* Доказательство утверждения в случае общего положения.
а) Рассмотрим какой-нибудь ненулевой вектор $v \in L$. Докажите, что набор векторов $v, Av, A^2v, \ldots, A^nv$, где $n = \dim L$ не может быть линейно независимым.
б) Пусть набор векторов $v, Av, A^2v, \ldots, A^{n-1}v$ линейно независим. Докажите, что тогда он является базисом пространства L.

в) Пусть $v, Av, A^2v, \ldots, A^{n-1}v$ линейно независимый набор. Тогда по доказанному выше существует представление

$$A^n v = a_{n-1}A^{n-1}v + a_{n-2}A^{n-2}v + \ldots + a_1 Av + a_0 v.$$

Пусть

$$P(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - a_{n-2}x^{n-2}v - \ldots - a_1 x - a_0 x.$$

Докажите, что для любого вектора w из набора $v, Av, A^2v, \ldots, A^{n-1}v$ выполняется $P(A)w = 0$.

г) Докажите, что для многочлена

$$P(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - a_{n-2}x^{n-2}v - \ldots - a_1 x - a_0 x$$

выполняется свойство $P(A) = 0$.

Указание: Докажите, что любой вектор $w \in L$ оператор $P(A)$ переводит в точку 0. Для этого разложите вектор w по базису $v, Av, A^2v, \ldots, A^{n-1}v$.

А4◇5* Доказательство утверждения в редком частном случае.

а) Докажите, что если любой вектор пространства L является собственным вектором оператора A, то $A = \lambda E$, где λ — некоторое число, E — тождественный оператор.

б) Докажите, что если $A = \lambda E$, то утверждение выполняется.

2. Начнём с матриц

Теорема **6.** Гамильтона–Кэли. (без доказательства). Характеристический многочлен $\chi(A) = \det(A - \lambda E)$ матрицы A обнуляет матрицу A, т.е. $\chi(A) = 0$, где 0 в этом случае — нулевая матрица того же размера, что и A.

А4◇6 Проверьте утверждение теоремы Гамильтона–Кэли для матриц

а) $A = 6$ матрица порядка 1;

б) $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

А4◇7 Пусть $P(x)$ — некоторый многочлен, $\chi(x)$ — характеристический многочлен матрицы A, $R(x)$ остаток от деления многочлена $P(x)$ на $\chi(x)$. Тогда $P(A) = R(A)$.

А4◇8 Пусть характеристический многочлен $\chi(x)$ матрицы A порядка n имеет n различных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Пусть $P(x)$ — некоторый многочлен, $R(x)$ остаток от деления многочлена $P(x)$ на $\chi(x)$. Докажите, что:

а) $P(\lambda_i) = R(\lambda_i)$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$.

б) Существует всего один многочлен степени ниже n, значения которого в точках $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ совпадают со значениями многочлена $P(x)$. Этот многочлен — $R(x)$.

в) $P(A) = R(A)$.

г) Пусть $L(x)$ — интерполяционный многочлен для функции $P(x)$ с простыми узлами интерполирования в точках $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Тогда $P(A) = L(A)$.

A4◇9 Пусть дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Найдём матрицу A^n следующим способом:

а) Найдём характеристический многочлен $\chi(x)$ матрицы A, его корни λ_1, λ_2.
б) Найдём значения интересующего нас многочлена $P(x) = x^n$ в точках λ_1, λ_2.
в) Найдём многочлен первой степени $R(x)$, принимающий такие же значения в точках λ_1, λ_2.
г) $A^n = R(A)$.
д) Найдите A^n обычным способом, проверьте, что ответы совпадают.

A4◇10 Пусть дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -3 & -8 & 7 \\ -4 & -12 & 10 \end{pmatrix}$. Найдём матрицу A^n следующим способом:

а) Найдём характеристический многочлен $\chi(x)$ матрицы A, его корни λ_1, λ_2, λ_3.
б) Найдём значения интересующего нас многочлена $P(x) = x^n$ в точках λ_1, λ_2, λ_3.
в) Найдём многочлен первой степени $R(x)$, принимающий такие же значения в точках λ_1, λ_2, λ_3.
г) $A^n = R(A)$.
д) Найдите A^n обычным способом, проверьте, что ответы совпадают.

3. Последовательности: оператор сдвига

Определение **7.** Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$, удовлетворяющую рекуррентному соотношению

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_{k-1} a_{n-k+1} + c_k a_{n-k}.$$

Уравнение

$$\lambda^k = c_1 \lambda^{k-1} + \cdots + c_{k-1}\lambda + c_k$$

называется характеристическим уравнением рекуррентного соотношения, многочлен

$$\chi(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - \ldots - c_{k-1} x - c_k$$

называется характеристическим многочленом этого рекуррентного соотношения.

A4◇11 Докажите, что геометрическая прогрессия $a_n = a\lambda^n$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \ldots + c_{k-1} a_{n-k+1} + c_k a_{n-k}$$

тогда и только тогда, когда λ удовлетворяет характеристическому уравнению

$$\lambda^k = c_1 \lambda^{k-1} + \ldots + c_{k-1}\lambda + c_k.$$

A4◇12 Докажите, что оператор сдвига T (см. определение 3 из листка А3) на пространстве L последовательностей, удовлетворяющих рекуррентному соотношению

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \ldots + c_{k-1} a_{n-k+1} + c_k a_{n-k},$$

обнуляется характеристическим многочленом этого соотношения. Иными словами $(T^k - c_1 T^{k-1} - \ldots - c_{k-1} T - c_k)(\{a_n\}) = \{0\}$, где $\{0\}$ — последовательность, состоящая из 0 (точка 0 линейного пространства L), $\{a_n\}$ — любая последовательность, удовлетворяющая соотношению

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \ldots + c_{k-1} a_{n-k+1} + c_k a_{n-k}.$$

Определение **8.** Обозначим через $\Omega(x)$ отображение, ставящее в соответствие бесконечной последовательности ее первый элемент $\Omega(\{a_n\}) = a_1$.

A4◇13 Докажите, что $\Omega(x)$ — линейный функционал.

A4◇14 Пусть $P(x) = x^n$. Выразите через члены последовательности $\{a_n\}$ первый член последовательности $P(T)(\{a_n\})$. Найдите $\Omega(P(T)(\{a_n\}))$. *Эта задача показывает, зачем нам изучать оператор сдвига на пространстве бесконечных последовательностей.*

A4◇15 Пусть характеристический многочлен $\chi(x)$ рекуррентного соотношения

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \ldots + c_{k-1} a_{n-k+1} + c_k a_{n-k}$$

имеет k различных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Пусть $P(x)$ — некоторый многочлен, $R(x)$ — остаток от деления многочлена $P(x)$ на $\chi(x)$. Докажите, что:
а) $P(\lambda_i) = R(\lambda_i)$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$.
б) Существует всего один многочлен степени ниже n, значения которого в точках $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ совпадают со значениями многочлена $P(x)$. Этот многочлен — $R(x)$.
в) $P(T)(\{a_n\}) = R(T)(\{a_n\})$ для любой бесконечной последовательности, удовлетворяющей рекуррентному соотношению

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \ldots + c_{k-1} a_{n-k+1} + c_k a_{n-k}.$$

г) Пусть $L(x)$ — интерполяционный многочлен для функции $P(x)$ с простыми узлами интерполирования в точках $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Тогда $P(T) = L(T)$.
д) Пусть $L(x)$ — интерполяционный многочлен для функции $P(x)$ с простыми узлами интерполирования в точках $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Тогда $\Omega(P(T)) = \Omega(L(T))$.

A4◇16 Пусть последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентным соотношением $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$. Найдём формулу для a_n следующим способом:
а) Найдём характеристический многочлен $\chi(x)$ рекуррентного соотношения $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, его корни λ_1 и λ_2.
б) Найдём значения интересующего нас многочлена $P(x) = x^{n-1}$ в точках λ_1 и λ_2.
в) Найдём многочлен первой степени $R(x)$, принимающий такие же значения в точках λ_1 и λ_2.
г) $\Omega(P(T)(\{a_n\})) = \Omega(R(T)(\{a_n\}))$. Сравните с ответом в задаче 8 дополнительного листочка A1.

A4◇17 Пусть последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентным соотношением $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2} - 6a_{n-3}$, $a_1 = 0$, $a_2 = 5$, $a_3 = 18$. Найдём формулу для a_n следующим способом:
а) Найдём характеристический многочлен $\chi(x)$ рекуррентного соотношения $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2} - 6a_{n-3}$, его корни λ_1, λ_2, λ_3.
б) Найдём значения интересующего нас многочлена $P(x) = x^{n-1}$ в точках λ_1, λ_2, λ_3.
в) Найдём многочлен второй степени $R(x)$, принимающий такие же значения в точках λ_1, λ_2, λ_3.

г) $\Omega(P(T)(\{a_n\})) = \Omega(R(T)(\{a_n\}))$. Сравните с ответом в задаче 9b дополнительного листочка A1.

A4◇18 Описанным выше способом найдите формулу для a_n, где $a_n = 2a_{n-1} - 10a_{n-2}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$. Сравните ответ с ответом задачи 9c листочка A1. Удивитесь возникновению и загадочному исчезновению комплексных чисел в решении этой задачи.